Discussion

der

durch die Gleichung

$$a y^3 + b x^3 = a b x y + c^3 (x + y)$$

dargestellten

krummen Linie.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Eduard Rechenbach.

Münster.

Gedruckt bei E. C. Brunn.

1872.

Discussion

der

durch die Gleichung

$$a y^3 + b x^3 = a b x y + c^3 (x + y)$$

dargestellten

krummen Linie.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Eduard Rechenbach.

Münster.

Gedruckt bei E. C. Brunn.

1872.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0279

Discussion

der

durch die Gleichung

$$ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x+y)$$

dargestellten

krummen Linie.

---

§. 1.

Vorstehende algebraische Gleichung dritten Grades hat nur dann geometrische Bedeutung, wenn ihre Constanten a, b und c nach derselben Einheit, Linien- oder Zahleneinheit, wie die Veränderlichen x und y gemessen werden, was sogleich aus der Form $\frac{y^2}{bx} + \frac{x^2}{ay} - \frac{c^2}{ab}\left(\frac{c}{y} + \frac{c}{x}\right) = 1$ erhellt.

Da nämlich die Summe $\frac{y^2}{bx} + \frac{x^2}{ay} - \frac{c^2}{ab}\left(\frac{c}{y} + \frac{c}{x}\right)$ gleich 1, also eine Zahl ist, so muss jeder einzelne Summand eine Zahl sein. Nimmt man daher die Veränderlichen x und y als Linien an, so müssen a, b und c ebenfalls Linien sein; betrachtet man jedoch x und y als Zahlen, so müssen auch die Constanten Zahlen sein.

Bei der Untersuchung obiger Gleichung wollen wir uns, da die Art des Coordinatensystems nicht bestimmt ist, des rechtwinkligen bedienen.

Die Gestalt der Curve.

Zuerst tritt entgegen, dass die Curve für den Fall, dass die Constanten a und b einander gleich sind, symmetrisch ist in Bezug auf ihre Lage zum Coordinatensystem. Denn die Gleichung $y^3+x^3=axy+\frac{c^3}{a}(x+y)$, welche Form ja die ursprüngliche Gleichung annimmt, lehrt, dass man x mit y vertauschen kann, dass also die Curve sowohl gegen die Abscissen- als gegen die Ordinaten-Achse dieselben Fortschreitungen hat. Durch Drehung der Achsen um den Winkel $\vartheta=45^0$ folgt aus den allgemeinen Verwandlungsformeln $x=t\cos\vartheta-u\sin\vartheta$ und $y=t\sin\vartheta+u\cos\vartheta$, dass $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{t+u}{\sqrt{2}}$ ist, wonach unsere Gleichung übergeht in

$$u=\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\frac{c^3}{a}t+at^2-t^3\sqrt{2}}{a+3t\sqrt{2}}}.$$

Diese Gleichung sagt uns, dass zu jedem Werthe von t 2 gleiche und entgegengesetzte Werthe von u gehören, dass also die Curve durch die t-Achse in 2 congruente Hälften zerlegt ist.

Aus $ay^3-abxy-c^3(x+y)+bx^3=0$ ersieht man:

Für $x=0$ wird $y=0$ und $y=\pm\sqrt{\frac{c^3}{a}}$, d. h. die Curve geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten und schneidet die Ordinatenachse auf ihrer positiven und negativen Seite in der Entfernung $\sqrt{\frac{c^3}{a}}$ vom Anfangspunkte. An Figur I. ist $AB=+\sqrt{\frac{c^3}{a}}$, $AC=-\sqrt{\frac{c^3}{a}}$.

Für $y=0$ wird $x=0$ und $x=\pm\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, d. h. die Curve schneidet die Abscissenachse auf ihrer positiven und ne-

gativen Seite in der Enfernung $\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ vom Anfangspunkte.

$$AD = +\sqrt{\frac{c^3}{b}},\quad AE = -\sqrt{\frac{c^3}{b}}.$$

Für $x = -y$ oder $\frac{x}{y} = -1$ geht die Gleichung über in $ay^3 - aby^2 - by^3 = 0$ oder $y^2[y(a-b)+ab] = 0$, und dieser genügen die Werthe $y = \pm 0$ und $y = -\frac{ab}{a-b}$, d. h. die Curve geht 2 Mal durch den Anfangspunkt und durch den leicht graphisch darzustellenden Punkt F, wenn $AG = -\frac{ab}{a-b}$. Umgekehrt finden wir für $y = -x$ oder $\frac{y}{x} = -1$ die Werthe $x = \pm 0$ und $x = -\frac{ab}{b-a}$.

Weitere Werthe für x und y ergeben immer eine Gleichung dritten Grades, welche aufzulösen zu weitläufig ist, weshalb man andere Wege einschlagen muss, um den Lauf der Curve genauer zu bestimmen.

Setzt man $y = tx$, so geht die Gleichung über in

$$at^3x^2 - abxt - c^3(1+t) + bx^2 = 0 \text{ oder}$$

$$x = \frac{abt \pm \sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3) + a^2b^2t^2}}{2(b+at^3)} \text{ und}$$

$$y = \frac{abt^2 \pm t\sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3) + a^2b^2t^2}}{2(b+at^3)}.$$

Auf diese Weise sind die Coordinaten durch eine und dieselbe 3te Veränderliche t ausgedrückt, und man erhält so für jeden beliebigen Werth von t ein paar zusammengehörige Werthe von x und y. Denkt man sich nun die Constanten a, b und c als nach einer bestimmten Zahleneinheit gemessene Linien, so kann man diese Einheiten selbst an ihre Stellen setzen. Gehören z. B. zu a vier, zu b drei, zu c zwei Einheiten, so wird

$$x = \frac{6t \pm 2\sqrt{2(1+t)(3+4t^3) + 9t^2}}{3+4t^3} \text{ und } y = tx.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man:

1. Die Curve ist eine continuirliche Linie.

Man erhält nämlich für jeden beliebigen positiven oder negativen Werth von t immer einen reellen Werth von x (und hiernach auch von y,) da die Grösse unter dem Wurzelzeichen stets reell bleibt, was aus Folgendem erhellt:

Der Ausdruck $2(1+t)(3+4t^3)+9t^2$ besteht aus 2 Theilen; der eine Theil, nämlich $9t^2$, ist immer positiv, der andere, nämlich $2(1+t)(b+at^3)$ kann nun aber positiv und negativ werden. Positiv ist er: 1. für alle positiven Werthe von t, 2. für alle negativen Werthe von t, welche die Factoren $(1+t)$ und $(3+4t^3)$ zu gleicher Zeit negativ machen. Der erste Factor wird nun negativ für $t>-1$, der zweite aber schon für $t>-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=-0{,}9086$. Für Werthe von t, welche >-1 sind, werden also beide Factoren negativ, d. h. das Product positiv, und nur für die Werthe von t, welche zwischen den Grenzen $t=-1$ und $t=-0{,}9086$ liegen, wird das Product negativ, weil für diese Werthe der Factor $(1+t)$ positiv, aber der Factor $(3+4t^3)$ negativ ist. Für solche Werthe von t ist aber $9t^2>2(1+t)(3+4t^3)$, mithin ist die Grösse der Wurzel immer reell.

2. Die Curve besteht aus 2 getrennten Zweigen.

Für den ersten Zweig gelten die Gleichungen

$$x=\frac{6t+2\sqrt{2(1+t)(3+4t^3)+9t^2}}{3+4t^3} \text{ und } y=tx,$$

für den zweiten die Gleichungen

$$x=\frac{6t-2\sqrt{2(1+t)(3+4t^3)+9t^2}}{3+4t^3} \text{ und } y=tx.$$

Was nun den ersten Zweig betrifft, so findet folgende Relation statt:

A. Der Curvenzweig bewegt sich nur im 1. 2. und 4. Quadranten des Coordinatensystems.

Um dieses zu beweisen, muss man sich zuerst die Bedeutung von t klar machen. Es war $y=tx$, also $t=\frac{y}{x}$ ge-

setzt; es bedeutet demnach t die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Verbindungslinie eines Punktes der Curve mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystems mit der Abscissenachse bildet. Für positive Werthe von t erhält man nun immer positive Werthe von x und y, d. h. der Curvenzweig bewegt sich nicht im 3. Quadranten, weil in diesem die x und y negativ sein müssen, wohl aber im 1. Quadranten. Für negative Werthe von t erhält man ein Mal negative x, aber positive y, das andere Mal positive x, aber negative y, d. h. der Curvenzweig bewegt sich bezüglich im 2. und 4. Quadranten.

B. Für $t=-1$ wird $x=0, y=0$; der Curvenzweig geht also durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems.

C. Der Curvenzweig ist eine in sich zurückkehrende krumme Linie, ein Oval.

Die Gleichungen $x=\frac{6t+2\sqrt{2(1+t)(3+4t^3)+9t^2}}{3+4t^3}$ und $y=tx$ können nämlich nie für irgend einen reellen Werth von t ein unendliches x oder y ergeben. Denn setzt man den Nenner $3+4t^3=0$ oder $t=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, so wird x nicht $=\infty$ sondern $x=-\frac{6\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+6\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{0}=\frac{0}{0}$.

Differentiirt man, um den wahren Werth dieses Bruches für $t=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ zu finden, Zähler und Nenner und setzt dann $t=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, so folgt aus

$$x=\frac{6+[2(1+t)(3+4t^3)+9t^2]^{\frac{1}{2}}(6+18t+24t^2+32t^3)}{12t^2}$$

$$=\frac{6\sqrt{2(1+t)(3+4t^3)+9t^2}+6+18t+24t^2+32t^3}{12t^2\sqrt{2(1+t)(3+4t^3)+9t^2}}$$

der Werth 0,07 als die wahre Grösse von x.

Um nun die Grenzen der Ordinaten und Abscissen zu bestimmen, verfährt man nach den Gesetzen über das Maximum und Minimum einer stetigen Function.

Aus 1) $ay^3 - abxy + bx^3 - c^3(x+y) = 0$ folgt

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{\frac{\delta F}{\delta x}} = -\frac{3ay^2 - abx - c^3}{3bx^2 - aby - c^3},$$

welcher Werth, gleich Null gesetzt, $x = \frac{3ay^2 - c^3}{ab}$ ergibt.

Durch Substitution dieser Grösse in die Gleichung 1) erhält man $27a^3y^6 - 27a^2c^3y^4 - 2a^4b^2y^3 - (3a^3bc^3 - 9ac^6)y^2 + a^2bc^6 - c^9 = 0$, oder für a, b und c die betreffenden Zahlen eingesetzt, I) $27y^6 - 54y^4 - 72y^3 - 36y^2 + 40 = 0$.

Dieser numerischen Gleichung 6. Grades entsprechen nahezu die Werthe $y_1 = 1{,}9$ und $y_2 = 0{,}64$.

Wendet man nun zur Auflösung derselben die sog. Newton'sche Näherungsmethode an, indem man 1. $y_1 = 1{,}9 + h_1$, 2. $y_2 = 0{,}64 + h_2$ setzt, so folgen aus $y^6 - \frac{54}{27}y^4 - \frac{72}{27}y^3 - \frac{36}{27}y^2 + \frac{40}{27} = 0$ die Gleichungen

$$h_1 = -\frac{27.1{,}9^6 - 54.1{,}9^4 - 72.1{,}9^3 - 36.1{,}9^2 + 40}{162.1{,}9^5 - 216.1{,}9^3 - 216.1{,}9^2 - 72.1{,}9} \text{ und}$$

$$h_2 = -\frac{27.0{,}64^6 - 54.0{,}64^4 - 72.0{,}64^3 - 36.0{,}64^2 + 40}{162.0{,}64^5 - 216.0{,}64^3 - 216.0{,}64^2 - 72.0{,}64} \text{ oder}$$

$h_1 = 0{,}01$ und $h_2 = -0{,}0047$. Hiernach genügen also die Werthe $y_1 = 1{,}91$ und $y_2 = 0{,}6353$ der Gleichung I) Diesen Werthen entsprechen aber nach Gleichung $3ay^2 - abx - c^3 = 0$ bezüglich die Grössen $x_1 = 2{,}98$ und $x_2 = 0{,}263$.

Für $y_1 = 1{,}91$ und $x_1 = 2{,}98$ wird nun der zweite Differentialquotient, wenn man den zu Null werdenden Theil vernachlässigt, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{6ay}{3bx^2 - aby - c^3} = -0{,}702$; für $y_2 = 0{,}6353$ und $x_2 = 0{,}263$ aber $= +0{,}76$. Wir haben also für $y_1 = 1{,}91$ ein Maximum, für $y_2 = 0{,}6353$ ein Minimum der Function x.

Ist nun AH = 2,98, AJ = — 0,263 und errichtet man in den Punkten H und J die auf AX senkrechten Geraden HK und JL, so bilden diese Senkrechten die äussersten Grenzen unserer Curve, über die sie nicht hinausgehen kann.

Weiter folgt aus 1) $ay^3 - abxy + bx^3 - c^3(x+y) = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3bx^2 - aby - c^3}{3ay^2 - abx - c^3}$, welcher Quotient, gleich Null gesetzt, gibt 2) $y = \frac{3bx^2 - c^3}{ab}$, wonach 1) übergeht in $27b^3x^6 - 27b^2c^3x^4 - 2a^2b^4x^3 - (3ab^3c^3 - 9bc^6)x^2 + ab^2c^6 - c^9 = 0$ oder $729x^6 - 1944x^4 - 2592x^3 - 864x^2 + 1792 = 0$, welcher Gleichung die Werthe $x_1 = 2{,}1296$ und $x_2 = 0{,}7142$ genügen. Aus 2) folgt dann $y_1 = 2{,}7347$ und $y_2 = -0{,}28$. Für diese Werthe von x und y wird aber der zweite Differentialquotient, wenn man wieder die zu Null werdenden Glieder vernachlässigt, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6bx}{3ay^2 - abx - c^3}$ bezüglich $= -0{,}686$ und $+0{,}82$.

Wir haben also für $x_1 = 2{,}1296$ ein Maximum, für $x_2 = 0{,}7142$ ein Minimum der Function y.

Macht man demnach AM = 2,7347, AN = 0,28, zieht die in den Punkten M und N auf YY senkrechten Geraden MP und NQ, so sind diese Senkrechten die Grenzen des Curvenzweiges.

Der Curvenzweig bewegt sich also in dem durch die 4 Graden LP, PQ, QN und JL abgeschlossenen Rechtecke.

Was nun den andern Curvenzweig anbetrifft, den, wie schon gesagt, die Gleichungen

$$x = \frac{abt - \sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3) + a^2b^2t^2}}{2(b+at^3)} \text{ und } y = tx$$

repräsentiren, so findet folgende Relation statt:

I. Der Zweig liegt im 2., 3. und 4. Quadranten, aber nicht im 1. Man erhält nämlich für negative Werthe von t stets entweder negative Abscissen, aber positive Ordinaten, oder positive Abscissen und negative Ordinaten, d. h. der Curvenzweig bewegt sich im 2. und 4. Quadranten. Für positive t erhält man aber immer

negative Ordinaten und negative Abscissen; der Zweig bewegt sich also im 3. Quadranten.

II. Der Curvenzweig zieht sich ins Unendliche fort.

Es wird nämlich für $b+at^3=0$ oder $t_1=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $t_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}(1+i\sqrt{3})$, $t_3=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}(1+i\sqrt{3})$ die Abscisse $=\infty$ und die Ordinate $=-\infty$. Die Curve erstreckt sich also für diese Werthe nach entgegengesetzter Richtung ins Unendliche, und da $t=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\operatorname{tg}\varphi$ negativ ist, so liegen die unendlichen Arme im 2. und 3. Quadranten.

Die Werthe von t_2 und t_3 ergeben, da sie imaginär sind, keine geometrische Deutung.

Zur Vervollständigung des Bildes der Curve ist nun noch die Bestimmung der Concavität und der Convexität nöthig.

Aus $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ folgt

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3bx^2-aby-c^3}{3ay^3-abx-c^3}$$ und

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(3ay^2-abx-c^3)(6bx-ab\frac{dy}{dx})-(3bx^2-aby-c^3)(6ay\frac{dy}{dx}-ab)}{(3ay^2-abx-c^3)^2}$$

oder für $\frac{dy}{dx}$ obiger Werth eingesetzt,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(3ay^2-abx-c^3)^3}[54a^2bxy^4+54ab^2x^4y-54a^2b^2x^2y^2-36abc^3xy^2-36abc^3x^2y+6a^2bc^3y^2+6ab^2c^3x^2+2a^3b^3xy+2a^2b^2c^3x+6bc^6x+2a^2b^2c^3y+6ac^6y+2abc^6].$$ Der Werth in der Klammer wird, wie man leicht sieht, gleich $36abxy[ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)]+18a^2bxy^4+18ab^2x^4y-18a^2b^2x^2y^2+6a^2bc^3y^2+6ab^2c^3x^2+2a^3b^3xy+2a^2b^2c^3x+6bc^6x+2a^2b^2c^3y+6ac^6y+2abc^6$ oder, da $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ ist, $18abxy(ay^3-abxy+bx^3)+6a^2bc^3y^2+6ab^2c^3x^2+2a^3b^3xy+2a^2b^2c^3x+6bc^6x+2a^2b^2c^3y+6ac^6y+2abc^6$. Setzt man nun $ay^3-abxy+bx^3=c^3(x+y)$, so wird endlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{(3ay^2 - abx - c^3)^3}[9abc^3x^2y + 9abc^3xy^2 + 3a^2bc^3y^2 + 3ab^2c^3x^2 + a^3b^3xy + (a^2b^2c^3 + 3bc^6)x + (a^2b^2c^3 + 3ac^6)y + abc^6].$$

So lange nun $y\frac{d^2y}{dx^2}$ ein negatives Product ist, ist die Curve concav gegen die Abscissenachse, wenn ein positives, convex gegen dieselbe.

Was zuerst die Ovale anbetrifft, so findet folgende Relation statt:

1. Für den Anfangspunkt der Coordinaten ist $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, d. h. die Curve ist im Punkte A weder concav noch convex.

2. Für den Punkt D, in welchem $y_1 = 0$, $x_1 = +\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ ist, ist die Curve ebenfalls weder concav noch convex.

3. Für die Punkte a, b, c u. s. w., denen bezüglich die Werthe $y_1 = -0{,}27$ und $x_1 = 0{,}54$, $y_2 = -0{,}28$ und $x_2 = 0{,}84$, $y_3 = -0{,}25$ und $x_3 = 1{,}01$ entsprechen, wird $y\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, die Curve ist also concav gegen die Abscissenachse. So ist z. B. für den Punkt a $\begin{pmatrix} y_1 = -0{,}27 \\ x_1 = 0{,}54 \end{pmatrix}$ das Product $y_1\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -0{,}2646$.

4. Für alle Punkte unserer Curve, welche im ersten Quadranten liegen, sind die Ordinaten und Abscissen positiv, der Zähler von $\frac{d^2y}{dx^2}$ mithin immer positiv. So lange also der Nenner $3ay^2 - abx - c^3 > 0$ ist, so lange ist der ganze Bruch, da er mit dem —Zeichen behaftet ist, negativ, d. h. die Curve concav gegen die Abscissenachse; ist dagegen $3ay^2 - abx - c^3 < 0$, so ist der Bruch positiv, die Curve also convex. Wenn $3ay^2 - abx - c^3 = 0$, so findet ein Uebergang des concaven Bogens zum convexen statt. Für diesen Werth wird aber $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. die Tangente, welche an diesen

Punkt gezogen ist, bildet mit der Abscissenachse einen rechten Winkel, die Ordinate selbst ist Tangente.

Dieselbe Relation findet statt für die Punkte des im 2ten Quadranten liegenden Curventheiles; auch hier wird der Zähler des Productes $y\frac{d^2y}{dx^2}$ immer positiv, mithin das Vorzeichen des Bruches abhängig vom Nenner $3a^2-abx-c^3$. Um nun die Uebergänge des Concaven zum Convexen zu bestimmen, muss man den Werth $3a^2-abx-c^3=0$ oder $x=\frac{3ay^2-c^3}{ab}$ in die Gleichung $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ substituiren, wodurch man die Seite 5 gefundene Gleichung I) erhält, der bezüglich die Werthe $y_1=1{,}91$ und $x_1=2{,}98$, $y_2=0{,}6353$ und $x^2=-0{,}263$ entsprechen. Macht man also HR $=1{,}91$ und JS $=0{,}6353$, da ja AH $=2{,}98$ und AJ $=0{,}263$ war, so sind HP und JL die betreffenden Tangenten und R und S die Berührungs- oder Uebergangspunkte.

Bedenkt man aber, dass $3ay^2-abx-c^3=0$ die Gleichung einer Parabel ist, so bestimmen sich die Uebergänge als die Durchschnittspunkte dieser Parabel mit unserer Curve.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkte T, d. h. setzt man $x=\psi-\frac{c^3}{ab}$ und $y=\varphi$, so wird die Gleichung der Parabel $\varphi^2=\frac{b}{3}\psi$, durch welche Gleichung die Parabel VTSR repräsentirt wird. Sie schneidet unsere Curve in den schon bestimmten Punkten S und R.

Unsere Curve ist also im 1. Quadranten convex vom Punkte D bis zum Punkte R. Hier schliesst sich der concave Bogen RWB an den convexen DR an.

Für den Punkt B, in welchem $x_1=0$, $y_1=+\sqrt{\frac{c^3}{a}}$ ist, wird $y_1\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4ab\sqrt{\frac{c^3}{a}}+ab^2+2c^3}{4c^9}$, mithin negativ, die Curve also in diesem Punkte concav gegen die Abscissenachse und bleibt concav bis zum Punkte S, wo ein Uebergang zum Convexen stattfindet.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so ist also die Ovale ADRWS concav gegen die Abscissenachse von A bis D, convex von D bis R, concav von R bis S, convex von S bis A.

In Bezug auf den Curvenzweig $UCEU_1$ gilt Folgendes:

In dem Punkte O, für welchen $t=1$, also $y_1=0{,}88$ und $x_1=-0{,}88$ ist, wird $y_1\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=-0{,}7656$, mithin ist die Curve in diesem Punkte concav gegen die Abscissenachse. Auch in der Nähe dieses Punktes ist sie concav. Für $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ oder für $9abc^3x^2y+9abc^3xy^2+3a^2bc^3y^2+3ab^2c^3x^2+a^3b^3xy+(a^2b^2c^3+3bc^6)x+(a^2b^2c^3+3ac^6)y+abc^6=0$ haben wir einen Uebergang vom Concaven zum Convexen, und da für diesen Werth weder $f(x)$ noch $f^1(x)=0$ wird, so haben wir hier 2 „Wendungspunkte", indem die Gleichung eine quadratische ist. Substituirt man die aus ihr gefundenen Werthe von y in die ursprüngliche Gleichung $ay^3-abxy+bx^3-c(x+y)=0$, so findet man die Coordinaten dieser Wendungspunkte.

§. 2.

Bei der Untersuchung des Laufes unserer Curve haben wir uns darauf beschränkt, die Constanten a, b und c positiv und $a>b>c$ anzunehmen. Anders gestaltet sie sich jedoch, wenn man diesen Grössen negative Werthe beilegt, oder vielleicht eine Constante negativ annimmt, die andere positiv, oder sie gleich Null setzt.

Es möge z. B. $a=0$ sein, dann wird $bx^3-c^3x-c^3y=0$.

Diese parabolische Curve besteht aus einem zu beiden Seiten der Y Achse sich ins Unendliche erstreckenden zusammenhängenden Zuge, da ja zu jedem beliebigen x ein zugehöriges reelles y berechnet werden kann. Betrachten wir nur zuerst den Theil, welcher auf der positiven Seite der x Achse liegt, so sehen wir aus $y=\frac{bx^2-c^3}{c^3}x$, dass der Curvenzweig mit dieser 2 Punkte gemeinsam hat; denn für $x=0$ und $x=\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ wird jedesmal $y=0$. Weiter folgern

wir, dass für Werthe von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ die Ordinate y negativ, aber für grössere Werthe von x positiv ist. Aus $\frac{dy}{dx}=\frac{3bx^2-c^3}{c^3}=0$ oder $x=\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$, welcher Werth in $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6bx}{c^3}$ substituirt, $\frac{d^2y}{dx^2}=2c\sqrt{3bc}$ gibt, folgt, dass die Ordinate für $x=\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$ ihr Minimum erreicht und dass die Tangente in diesem Punkte $\parallel$ der x-Achse ist. Der Zweig bewegt sich also, im Anfangspunkte A (Fig. II.) der Coordinaten beginnend, im 4. Quadranten, erreicht im Punkte B $\left(\begin{matrix}x=\sqrt{\frac{c^3}{3b}}\\ y=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{c^3}{3b}}\end{matrix}\right)$ seine weiteste Entfernung von der Achse der x, schneidet dieselbe im Punkte C $\left(\begin{matrix}x=\sqrt{\frac{c^3}{b}}\\ y=0\end{matrix}\right)$ und erstreckt sich ins Unendliche im 1. Quadranten. Ganz entsprechende Relationen finden statt für den Zweig auf der negativen Seite der Abscissenachse, nur dass für Werthe von $x=0$ bis $x=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ die Ordinate positiv wird, für $x=-\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$ ihr Maximum erreicht, dann für $x=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ zu Null und für grössere Werthe negativ wird. Der Zweig bewegt sich also von A ausgehend im 2. Quadranten, erlangt seine grösste Entfernung von der x-Achse im Punkte D $\left(\begin{matrix}x=-\sqrt{\frac{c^3}{3b}}\\ y=+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{c^3}{3b}}\end{matrix}\right)$, schneidet dieselbe im Punkte E $\left(\begin{matrix}x=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}\\ y=0\end{matrix}\right)$ und erstreckt sich nun im 4. Quadranten ins Unendliche. Die Curve HBADG besteht demnach aus 2 congruenten nach entgegengesetzter Richtung sich erstreckenden Zügen.

Eür den Punkt A $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{pmatrix}$ geht die Gleichung der Tangente $y - y_1 = \frac{3bx_1^2 - c^3}{c^3}(x - x_1)$ über in $y = -x$ oder $\frac{y}{x} = -1$, welche Gleichung den Curvenzweigen AB und AD Genüge leistet, da $\frac{y}{x} = tg\varphi = -1$ im 2. und 4. Quadranten Geltung hat.

Aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 6bx$ ersieht man sofort, dass die Curventheile ABC und ADE concav gegen die Abscissenachse sind, da für sie $y\frac{d^2y}{dx^2}$ immer negativ ist.

Die Curvenzweige CH und EG dagegen sind convex gegen dieselbe, weil $y\frac{d^2y}{dx^2}$ immer positiv ist. Verlegt man aber den Anfangspunkt der Coordinaten von A nach A_1, so dass $x = t - m$, wo $m > \sqrt{\frac{c^3}{3b}}$ sein möge, $y = u$ wird, so geht die Gleichung über in $t - m = \frac{bu^2 - c^3}{c^3}$ und es wird jetzt $\frac{d^2t}{du^2} = 6bu$ für $u = 0$ zu Null, nicht aber $f^1(u)$ und $f(u)$, indem $\frac{dt}{du} = -1$ und $t - m = 0$ oder $t = m$ wird; es findet also für den Punkt A $\begin{pmatrix} u = 0 \\ t = m \end{pmatrix}$ ein Uebergang des Concaven zum Convexen statt und er wird jetzt ein „Wendepunkt“. Die Gleichung der Tangente $t - \eta = \frac{3bu^2 - c^3}{c^3}(u - \xi)$ geht für den Punkt A $\begin{pmatrix} \eta = m \\ \xi = 0 \end{pmatrix}$ über in $t - m = u$ oder $\frac{t}{m} + \frac{u}{m} = 1$, so dass die Grade JK dieselbe repräsentirt, wenn man $A_1J = AA_1$ macht.

Ist in unserer allgemeinen Gleichung $b = 0$, so wird $ay^3 - c^3x - c^3y = 0$. Die durch diese Gleichung repräsentirte Curve besteht aus einem zu beiden Seiten der x-Achse

sich ins Unendliche erstreckenden zusammenhängenden Zuge, weil man für jedes y ein zugehöriges reelles x erhält. Sie ist, wie die Gleichung sofort erkennen lässt, von ganz ähnlicher Gestalt in Bezug auf die x-Achse, wie die vorige in Bezug auf die y-Achse, nur differiren sie in Verschiedenheit der Constanten a und b. Die Linie LMANP gibt uns den Lauf der Curve an.

Durch Subtraction beider Gleichungen finden wir die Durchschnittspunkte der beiden Curven. Es folgt dann aus $bx^3 - c^3y - c^3x - (ay^3 - c^3y - c^3x) = 0$, dass $bx^3 = ay^3$ ist. Die beiden Curven haben also 3 Durchschnittspunkte, welche auf der durch die Gleichung $y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,x$ repräsentirten Geraden QR liegen.

Ist $c = 0$, a und b positiv, so erhalten wir die Gleichung $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$. Um diese discutiren zu können, setzen wir $y = tx$, wodurch wir die Gleichung $x^2(at^3x - abt + bx) = 0$ erhalten. Es entsprechen dieser Gleichung die Werthe 1) $x = \pm 0$ und 2) $at^3x - abt + bx = 0$. Aus 1) ersieht man, dass die Curve 2 Mal durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, aus 2) folgt $x = \frac{abt}{b + at^3}$, $y = \frac{abt^2}{b + at^3}$.

Diese beiden Gleichungen lehren nun:

1. Die Curve bewegt sich im ersten, zweiten und vierten Quadranten.

   Für positive Werthe von t d. h. von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{2}$ und von $t = \pi$ bis $t = \frac{3}{2}\pi$ erhält man immer positive Werthe von x und y, mithin kann sich die Curve nicht im 3. Quadranten bewegen, weil in ihm sowohl x als y negativ sind. Für negative t d. h. für Werthe von t, welche dem 2. und 4. Quadranten entsprechen, erhält man immer entweder negative Abscissen und positive Ordinaten, oder positive Abscissen und negative Ordinaten, mithin bewegt sich die Curve im 2. und 4. Quadranten.

2. Die Curve bildet im 1. Quadranten eine Schleife, im 2. und 4. erstreckt sie sich ins Unendliche.

Für $t=0$ nämlich, ist $x=0$; für wachsende t nimmt nun x zu, bis es für $t=\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$ sein Maximum erreicht, wie aus Folgendem leicht ersichtlich ist:

$\frac{dx}{dt}=\frac{(b+at^3)ab-3a^2bt^3}{(b+at^3)^2}$, welche Gleichung $=0$ gesetzt, $t=\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$ gibt. Weiter ist

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{(b+at^3)^2(-6a^2bt^2)-(ab^2-2a^2bt^3)(b+at^3).6at^2.}{(b+at^3)^4}$$

Für $t=\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$ wird $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4}{3}a\sqrt[3]{2ab^2}$, mithin ist $\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$ ein Maximum der Function $\frac{abt}{b+at^3}$.

Für grössere Werthe von t nimmt die Abscisse wieder ab und wird zu Null für $t=\infty$, was sogleich aus der Form $x=\frac{ab}{\frac{b}{t}+abt^2}=\frac{b}{0+\infty^2}=0$ erhellt.

Die Ordinate y wächst für Werthe von $t=0$ bis $t=\sqrt[3]{\frac{2b}{a}}$, erreicht hier ihr Maximum und nimmt ab für alle grösseren Werthe von t und wird ebenfalls zu Null fü $rt=\infty$.

Da nun die Abscisse x, sowie die Ordinate y für alle positiven Werthe von t auch positiv sind und beide von 0 anheben, bis zu einer gewissen Grenze wachsen, von da wieder abnehmen bis zu Null, so bildet die Curve im 1. Quadranten eine geschlossene Figur.

Für negative t erhält man, wie schon gesagt, entweder negative Abscissen und positive Ordinaten, oder positive Abscissen und dazu gehörige negative Ordinaten, bis für $b+at^3=0$ oder $t=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sowohl x als $y=\infty$ wird d. h.

die Curve erstreckt sich im 2. und 4. Quadranten ins Unendliche.

Nach den Regeln über das Maximum und Minimum einer stetigen Function ergeben sich folgende Relationen:

Aus 1) $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$ folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{3bx^2 - aby}{3ay^2 - abx}$,

mithin ist für $\frac{dy}{dx} = 0$ die Grösse $3bx^2 - aby = 0$ oder $y = \frac{3x^2}{a}$, wonach die Gleichung 1) übergeht in $27x^6 - 2a^2bx^3 = 0$ oder $x^3(27x^3 - 2a^2b) = 0$, welcher Gleichung die Werthe $x = 0, x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2a^2b}$ genügen. Hiernach ist $y = 0$, $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4ab^2}$.

Für die Werthe $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2a^2b}$ und $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4ab^2}$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b^3xy}{(3y^2 - bx)^3} = -\frac{6}{a}$, mithin ist $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2a^2b}$ ein Maximum der Function $f(x,y) = 0$.

Für die Werthe $x = 0$, $y = 0$ erscheint $\frac{dy}{dx} = -\frac{3bx^2 - aby}{3ay^2 - abx}$ unter der Form $\frac{0}{0}$. Um den wahren Werth dieses Bruches zu finden, differentiiren wir Zähler und Nenner in Bezug auf x und es wird dann $\frac{dy}{dx} = -\frac{6bx - ab\frac{dy}{dx}}{6ay\frac{dy}{dx} - ab}$ od. $6ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2ab\frac{dy}{dx} = -6bx$ oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{6y} \pm \frac{1}{6y}\sqrt{\frac{ab^2 - 36bxy}{a}}$.

Setzt man jetzt $x = 0$, $y = 0$, so wird $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{0} \pm \frac{b}{0}$, demnach $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$, $\frac{dy_2}{dx_2} = \infty$, d. h. im Anfangspunkte der Coordinaten, für welchen ja $x = 0$, $y = 0$ ist, hat die Curve 2 Tangenten, von denen die eine die x-Achse, die andere die y-Achse ist, und es ist also der Anfangspunkt ein sog. Doppelpunkt.

Aus dem Gesagten tritt nun deutlich die Gestalt der in Figur III. angegebenen Curve hervor.

Ist $a=b$, so wird $y^3-axy+x^3=0$.

Dieses ist die Gleichung derjenigen Curve, welche den Namen folium Cartesii führt. Cartesius führt dieselbe in der Sammlung seiner Briefe (P. III, ep. 48) an, berücksichtigt jedoch nur einen Theil derselben. Sie ist natürlich von ganz ähnlicher Gestalt wie die der Gleichung $ay^3-abxy+bx^3=0$ angehörige, jedoch ist sie symmetrisch in Bezug auf ihre Lage zum Coordinatensystem. Durch die (Seite 2) angewandte Drehung der Achsen erhält man die Gleichung $u=\pm t\sqrt{\frac{a-t\sqrt{2}}{a+3t\sqrt{2}}}$, woraus ersichtlich, dass die Curve aus 2 congruenten, zu beiden Seiten der t-Achse liegenden Theilen besteht. Figur IV. gibt uns die Gestalt derselben an.

Wir könnten nun, indem wir den Constanten verschiedene Werthe beilegen, noch andere Gleichungen aufstellen. Die grosse Mannigfaltigkeit der Combinationen, welche sich aus diesen Voraussetzungen ergeben, würde uns aber zu weit führen, wesshalb wir uns darauf beschränken wollen, die Eigenschaften 1. der Curve zu untersuchen, für welche a, b und c positive Grössen und zwar $a>b>c$ und 2. der, für welche $c=0$ ist.

§. 3.

Die Construction der Curve.

Um zuerst unsere Gleichung auf elementarem Wege zu construiren, benutzen wir oben gebrauchte Einführung einer neuen Veränderlichen, wonach $y=tx$ oder $\frac{y}{x}=t=tg\varphi$ ist. Es wird dann, wie man leicht sieht,

$$x=\frac{abtg\varphi}{2(b+atg\varphi^3)}\pm\sqrt{\frac{c^2(c+ctg\varphi)}{b+atg\varphi^3}+\frac{a^2b^2tg\varphi^2}{4(b+atg\varphi^3)^2}}.$$

Setzt man nun $\frac{c^2(c+ctg\varphi)}{b+atg\varphi^3}=v^2$, $\frac{a^2b^2tg\varphi^2}{4(b+atg\varphi^3)^2}=\omega^2$, so wird $x=\omega\pm\sqrt{v^2+\omega^2}=\omega\pm s$, wenn $s=\sqrt{v^2+\omega^2}$ ist.

Für einen beliebigen Winkel $BOA=\varphi$ (Fig. V.) ist nun $AB=atg\varphi$, wenn $OA=a$ und $AB\perp OA$, $AC=atg\varphi.tg\varphi=atg\varphi^2$, wenn $BC\perp OB$, $AD=atg\varphi^2.tg\varphi=atg\varphi^3$, wenn $CD\perp BC$ ist. Mache ich also $DE=b$, so ist 1) $AE=b+atg\varphi^3=g$, und mache ich $AF=c$, verbinde E mit F, errichte auf EF im Punkte F eine Senkrechte, so ist 2) $AG=\frac{AF^2}{AE}=\frac{c^2}{g}=m$. Ist weiter $OF=c$, so ist $FH=ctg\varphi$ und $OK=c+c.tg\varphi=h$, wenn $FK=FH$ ist. Mache ich also $AL=OK=h$, beschreibe über LG als Durchmesser einen Kreis, so ist $AG.AL=AM^2$ oder $m.h=AM^2$, mithin 3) $AM=v$.

Aus $\omega=\frac{abtg\varphi}{2g}$ folgt $\omega:b=\frac{atg\varphi}{2}:g$. Halbire ich $atg\varphi=AB$ in N, mache $EQ=b$, verbinde A mit Q und ziehe $NR\parallel AQ$, so ist $QR:EQ=AN:AE$ oder $QR:b=\frac{atg\varphi}{2}:g$, alsso 4) $QR=\omega$.

Mache ich $OS=QR$, $OT=AM$, so ist $ST=\pm\sqrt{OS^2+OT^2}=\pm\sqrt{v^2+\omega^2}=\pm s$ und beschreibe ich mit ST um S einen Kreis, so ist $OU=\omega+s=x_1$, $OV=\omega-s=x_2$ und errichte ich in den Punkten U und V Senkrechte auf XX, so sind die Schnittpunkte P und P_1 Punkte der zu construirenden Curve.

Wenn auch diese Construction sehr weitläufig ist, so ersieht man jedoch, dass man für jeden beliebigen Winkel φ 2 Punkte P und P_1 findet.

Eine bequeme und genaue Construction liefern uns obige Gleichungen für x und y, wenn wir die für a, b und c angegebenen Zahlen 4, 3 und 2 einsetzen und nun dem t alle möglichen Werthe beilegen. Die Figuren VIII, IX, X und XI sind hiernach construirt.

Eine andere Construction erhalten wir durch folgende Betrachtung:

Aus $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ folgt, wenn man die Gleichung durch abxy dividirt, $\frac{y^2}{bx}+\frac{x^2}{ay}-\frac{c^3}{aby}-\frac{c^3}{abx}=1$,

welche Gleichung wir uns entstanden denken können aus der Summation der Gleichungen $\frac{y^2}{bx} - \frac{c^3}{abx} = A$

$\frac{x^2}{ay} - \frac{c^3}{aby} = 1 - A$ und diese repräsentiren je eine Parabel, mithin ist der Durchschnittspunkt beider Parabeln ein Punkt unserer Curve.

Setzt man beispielsweise $A = \frac{3}{4}$, dann sind die Durchschnittspunkte der Parabeln $\frac{y^2}{bx} - \frac{c^3}{abx} = \frac{3}{4}$ und $\frac{x^2}{ay} - \frac{c^3}{aby} = \frac{1}{4}$ Punkte unserer Curve.

Zur leichteren Construction der durch die Gleichung $\frac{y^2}{bx} - \frac{c^3}{abx} = \frac{3}{4}$ oder $y^2 = \frac{3}{4} bx + \frac{c^3}{a}$ dargestellten Parabel verlege ich das Coordinatensystem, indem ich $x = x_1 - \frac{4c^3}{3ab}$ setze, wonach die Gleichung übergeht in $y^2 = \frac{3}{4} bx_1$, und um die Gleichung $\frac{x^2}{ay} - \frac{c^3}{aby} = \frac{1}{4}$ oder $x^2 = \frac{1}{4} ay + \frac{c^3}{b}$ zu construiren, setze ich $y = y_1 - \frac{4c^3}{ab}$, d. h. ich verlege die Abscissenachse um das Stück $00_2 = -\frac{4c^3}{ab}$, wonach die Gleichung übergeht in $x^2 = \frac{1}{4} ay_1$.

Ist nun PO_1P_1 die durch $y^2 = \frac{3}{4} bx_1$ (Fig. VI), QO_2Q_1 die durch $x^2 = \frac{1}{4} ay_1$ dargestellte Parabel, so sind die Durchschnittspunkte derselben, nämlich S und S_1 Punkte unserer Curve.

Ist in der Gleichung $\frac{y^2}{bx} + \frac{x^2}{ay} - \frac{c^3}{aby} - \frac{c^3}{abx} = 1$ die Constante $c = 0$, so wird $\frac{y^2}{bx} + \frac{x^2}{ay} = 1$, welche Gleichungen man sich entstanden denken kann aus der Summation der Glei-

chungen 1) $\frac{x^2}{ay}=M$ und 2) $\frac{y^2}{bx}=1-M$. Aus 1) folgt nun $aM:x=x:y$; aus 2) folgt $x:y=y:b\,(1-M)$ oder $aM:x=x:y=y:b\,(1-M)$, d. h. die Coordinaten der durch die Gleichung $ay^3-abxy+bx^3=0$ repräsentirten Curve sind die mittleren stetigen Proportionalen zwischen Multipla von a und b.

Wir sind durch diese Betrachtung auf die sog. „Delische Aufgabe“ gekommen, mit deren Lösung sich sowohl die alten als die neuern Mathematiker beschäftigt haben. Die verschiedenen Auflösungen dieser Aufgabe geben uns verschiedene Constructionen unserer Curve. Da diese uns aber zu weit führen würden, so wollen wir sie hier übergehen.

Weiter ergeben sich aus der Proportion $aM:x=x:y=y:b\,(1-M)$ die Gleichungen $y^2=b\,(1-M)\,x$ und $x.y=ab\,(1-M)\,M$, oder wenn man z. B. $M=\frac{3}{4}$ setzt, 1) $y^2=\frac{3}{4}bx$ und 2) $x.y=\frac{3}{16}ab=\frac{3}{16}m^2$. Die Gleichung 1) ist die einer Parabel, deren Parameter $=\frac{1}{4}b$ ist, die Gleichung 2) die einer Hyperbel bezogen auf ihre Asymptoten deren Potenz $=\frac{3}{16}ab$ ist. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Kegelschnitte ist also ein Punkt unserer Curve.

§. 4.

Die Asymptote.

Es sei $y=kx+l$ die Gleichung der Asymptote, wo $\lim\frac{y}{x}=k$ und $l=\lim(y-kx)$ für $x=\infty$ ist. Da nach Seite 2 $y=tx$ ist, so ist $\frac{y}{x}=t$, und $\lim t$ ist derjenige Werth, welchen t erlangt in der Gleichung

$$x=\frac{abt-\sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3)+a^2b^2t^2}}{2(b+at^3)}.$$

Es wird aber $x=\infty$ für $b+at^3=0$ oder $t_1=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $t_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,(1+i\sqrt{3})$, $t_3=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}(1-i\sqrt{3})$. Für t geht also die Gleichung $\lim\frac{y}{x}=t$ über in $\lim\frac{y}{x}=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=k$.

Es fragt sich nun, wo die Asymptote die Coordinaten-Achsen schneidet d. h. es fragt sich, wie das absolute Glied l beschaffen ist.

Es ist

$$l=\lim(y-kx)=\lim\left(tx+x\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\lim x\left(t+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right),$$

mithin

$$l=\lim\left(t+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\frac{abt-\sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3)+a^2b^2t^2}}{2(b+at^3)}.$$

Für $t=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ erlangt diese Gleichung den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$; wir müssen also die Gleichung umformen oder Zähler und Nenner des Bruches differentiiren und dann $t=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ setzen. Thun wir das erstere, indem wir $b+at^3$ durch $t+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ dividiren, so ist

$$l=\lim\frac{abt-\sqrt{4c^3(1+t)(b+at^3)+a^2b^2t^2}}{2\left(at^2-at\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\right)},\text{ und}$$

jetzt für t den Werth $-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ gesetzt, gibt

$$l = \frac{-2ab\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{6\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}.$$

Die Gleichung der Asymptote ist also

$$y = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,x - \frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2} \text{ oder } \frac{y}{-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}} + \frac{x}{-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b}} = 1.$$

Um also die Asymptote zu construiren, braucht man nur auf der negativen Abscisse den Werth $\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b}$ und auf der negativen Ordinate den Werth $\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}$ abzutragen und die Punkte M und N Figur VII. mit einander zu verbinden.

Für die Curve, deren Gleichung $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$ ist, findet man leicht dieselbe Gleichung der Asymptote.

Die Werthe t_2 und t_3 ergeben für sich genommen keine geometrische Deutung. Benutzen wir jedoch die von Plücker in seinem Werke „System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen u. s. w." angewandte Methode der Behandlung der Curven, so kommen wir zu interessanten Resultaten.

Es sei

$y^3 + ay^2x + byx^2 + cx^3 + dy^2 + eyx + fx^2 + gy + hx + i = 0$

die allgemeine Gleichung 3. Grades zwischen den beiden Veränderlichen x und y, so kann man an die Stelle dieser Gleichung im Allgemeinen jede andere setzen, welche ebenfalls vom 3. Grade ist und 9 unbestimmte, von einander unabhängige Constanten hat. Zugleich lassen sich, indem man beide Gleichungen als identisch betrachtet, die neuen Coefficienten durch die ursprünglichen bestimmen. Für jede besondere Annahme bleibt dann die Untersuchung, ob die 9 Gleichungen, die man auf diesem Wege zur Bestimmung der 9 neuen Constanten erhält, von der Art sind, dass diese Bestimmung überhaupt und insbesondere auf lineare Weise möglich ist, und dann ferner, in welchen Fällen die neuen Constanten reelle oder imaginäre Werthe erhalten.

Soll nun die neue Gleichung aus linearen und ganzen Functionen der Veränderlichen x und y bestehen, so muss in derselben

1. ein Product aus 3 solchen Functionen vorkommen, damit die (neue) Gleichung eine Gleichung vom 3. Grade bleibt. Gibt man nun der linearen Function die Form $y+a_1x+b_1$, so enthält sie erst 6 Constanten, es muss also
2. noch eine lineare Function von derselben Form und eine 9te Constante hinzukommen, so dass sich die neue Gleichung unter der Form darstellt:

$$(y+a_1x+b_1)(y+a_2x+b_2)(y+a_3x+b_3)+\mu(y+c_1x+d_1)=0.$$

Diese Gleichung entwickelt, gibt:

$$y^3+(a_1+a_2+a_3)y^2x+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)yx^2+a_1a_2a_3x^3$$
$$+(b_1+b_2+b_3)y^2+[(a_1+a_2)b_3+(a_1+a_3)b_2+(a_2+a_3)b_1]yx$$
$$+(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3+\mu)y$$
$$+(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2+\mu c_1)x+b_1b_2b_3+\mu d_1=0.$$

Aus der Zusammenstellung der Coefficienten dieser Gleichung mit den entsprechenden der allgemeinen Gleichung erhält man nun die neuen Constanten bestimmt durch die alten.

Dieses Raisonnement auf die Gleichung $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ oder $y^3-bxy+\frac{b}{a}x^3-\frac{c^3}{a}x-\frac{c^3}{a}y=0$ angewendet, gibt die 9 Bedingungsgleichungen:

$$a_1+a_2+a_3=0,$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=0,$$
$$a_1a_2a_3=\frac{b}{a},$$
$$b_1+b_2+b_3=0,$$
$$(a_1+a_2)b_3+(a_1+a_3)b_2+(a_2+a_3)b_1=-b,$$
$$a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1=0,$$
$$b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3+\mu=-\frac{c^3}{a},$$
$$a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2+\mu c_1=-\frac{c^3}{a},$$
$$b_1b_2b_3+\mu d_1=0.$$

Aus diesen 9 Bedingungsgleichungen findet man:

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \mp \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}},$$

$$a_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}},$$

$$b_1 = -\frac{b}{3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}},$$

$$b_2 = b\frac{-3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \mp 2\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}}{\pm 12\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}},$$

$$b_3 = b\frac{3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \mp 2\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}}{12\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}},$$

$$\mu = -\frac{c^3}{a},$$

$$c_1 = 1,$$

$$d_1 = \frac{a^2b^2}{27c^3}.$$

Die gegebene Gleichung geht demnach durch Einsetzung und leichte Umformung dieser Werthe über in

$$\left[y + \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2bx} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\right]\left[y - \frac{1}{2a}\sqrt[3]{a^2b}(1 \pm \sqrt{-3})\,x\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{b^2a} + \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\pm 2\sqrt{-3}}\right)\right]\left[y - \frac{1}{2a}\sqrt[3]{a^2b}(1 \mp \sqrt{-3})\,x\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2} - \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\pm 2\sqrt{-3}}\right)\right] - \frac{c^3}{a}\left(y + x + \frac{a^2b^2}{27c^3}\right) = 0.$$

Auf diese Weise haben wir also die gegebene Gleichung $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$ durch ein Product aus 3 linearen Functionen, vermehrt um eine lineare Function von derselben Form dargestellt.

Der erste Factor dieses Productes ist nun eine reelle Function, die beiden andern aber nicht; da nun die lineare Function $-\frac{c^3}{a}\left(y+x+\frac{a^2b^2}{27c^3}\right)$ auch reell ist, so muss das Product der beiden letzten Factoren, nämlich

$$y-\frac{1}{2a}\sqrt[3]{a^2b}\,x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}+\frac{3\sqrt[3]{a^2b}\,x-a\sqrt[3]{ab^2}}{\pm 2a\sqrt{-3}} \text{ und}$$

$$y-\frac{1}{2a}\sqrt[3]{a^2b}\,x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}-\frac{3\sqrt[3]{a^2b}\,x-a\sqrt[3]{ab^2}}{\pm 2a\sqrt{-3}}$$

reell sein, was wirklich der Fall ist, indem das Product gleich $y^2-\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,yx-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\,y+\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab^2}\,x^2-\frac{b}{3}x+\frac{b}{9}\sqrt[3]{a^2b}$ ist.

Bezeichnet man der Kürze halber die einzelnen Factoren des Productes bezüglich mit p, q und r und setzt $y+x+\frac{a^2b^2}{27c^3}=s$, $-\frac{c^3}{a}=\mu$, so nimmt obige Gleichung die Form I) $pqr+\mu s=0$ an.

Setzt man in dieser Gleichung die linearen Functionen p, q und r einzeln gleich Null, so reducirt sich die Gleichung auf eine vom 1. Grade; man erhält also für die Veränderlichen x und y immer nur einen Werth, während man doch aus der Zusammenstellung einer linearen Gleichung mit der Gleichung I) im Allgemeinen sowohl für x als für y drei Werthe erhält. Der Grund hiervon liegt darin, dass 2 Werthe jeder der beiden Veränderlichen unendlich werden, dass man sie also nicht algebraisch bestimmen kann. Jede der 3 Geraden $p=0$, $q=0$, $r=0$ schneidet also die Curve in solchen 3 Punkten, von welchen zweien unendliche Werthe der beiden Veränderlichen x und y entsprechen.

Der Gleichung $pqr+\mu s=0$ wird nun auf 3fache Weise Genüge geleistet, nämlich durch $p=0$ und zugleich $s=0$, $q=0$ und $s=0$, $r=0$ und $s=0$, d. h. die durch die Glei-

chungen $p=0$, $q=0$, $r=0$ dargestellten geraden Linien schneiden die Curve in 3 Punkten, welche auf der Geraden $s=0$ liegen.

Zur Vervollständigung der geometrischen Bedeutung der Gleichung $pqr+\mu s=0$ gehört noch die Bestimmung des Coordinatensystems. Wir wollen nun die Veränderlichen x und y als lineare und ganze Functionen der gebräuchlichen rechtwinkligen Parallelcoordinaten annehmen. Es sind aber dann p, q, r und s eben solche Funktionen, und es stellen die Gleichungen $p=0$, $q=0$, $r=0$ solche 3 gerade Linien dar, deren jede, weil wie schon gesagt, 2 Durchschnittspunkte unendlich weit liegen, die Curve 3ter Ordnung in einem einzigen Punkte schneidet, und diese Linien nennen wir „Asymptoten".

Von diesen Asymptoten ist aber nun die durch die Gleichung $p=0$ dargestellte reell, die beiden anderen sind imaginär.

Wir können jedoch von einem reellen Durchschnittspunkte der beiden imaginären Asymptoten sprechen.

Es genügen nämlich der Gleichung $pqr+\mu s=0$ auch die Werthe $qr=0$ und $s=0$. Es war aber

$$qr=y^2-\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,yx-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\,y+\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab^2}\,x^2-\frac{b}{3}x+\frac{b}{9}\sqrt[3]{a^2b}=0$$

oder

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,x+\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,x-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt[3]{ab^2}\right)\sqrt{-1}.$$

Diese Gleichung lehrt aber, dass y nur reell sein kann, wenn der imaginäre Theil der Gleichung $=0$ ist, d. h. wenn $\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,x-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt[3]{ab^2}=0$, oder $x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b}$ ist. Für diesen Werth von x ist $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}$.

Es repräsentirt also die Gleichung $qr=0$ einen leicht zu construirenden Punkt A (Fig. VII.) und dieser Punkt ist der sog. Asymptotenpunkt.

Um nun die Beschaffenheit dieses Punktes näher kennen zu lernen, wollen wir einmal qr nicht $=0$, sondern gleich einer willkürlichen Constanten γ^2 setzen; es wird dann

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x+\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4y^2-3\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\right)^2},$$

welche Gleichung die einer Ellipse ist.

Hiernach können wir den Asymptotenpunkt als eine Ellipse ansehen, deren Dimensionen immer abgenommen haben, während ihre Durchmesser bis zum Verschwinden dieselbe Lage uud dasselbe Verhältniss zu einander beibehalten haben, ebenso wie wir den durch $y^2+x^2=0$ repräsentirten Punkt als einen Kreis mit verschwindendem Radius ansehen.

Auch können wir von den beiden Achsen und den zugeordneten Durchmessern dieses Asymptotenpunktes sprechen.

Setzt man nämlich $t=y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}$ und

$\omega=\frac{3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\sqrt[3]{ab^2}}{2\sqrt{3}}$, so wird $q=t+\omega i$, $r=t-\omega i$ und setzt man $t=u+\alpha v$, $\omega=v-\alpha u$, in welchen Gleichungen α eine willkürliche Constante bedeutet, so wird

1) $q=u+\alpha v+(v-\alpha u)i$
2) $r=u+\alpha v-(v-\alpha u)i$, und
3) $v=\frac{\omega+\alpha t}{1+\alpha^2}$, $u=\frac{t-\alpha\omega}{1+\alpha^2}$.

Aus der Multiplication von 1) und 2) folgt nun

4) $qr=(1+\alpha^2)(u^2+v^2)$;

und setzt man in die Gleichungen 3) für ω und t obige Werthe ein, so wird

$$u=\frac{\left(y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}\right)-\alpha\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}\right)}{1+\alpha^2}$$

$$v=\frac{\alpha\left(y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}\right)}{1+\alpha^2}$$

demnach 5) $qr=(1+\alpha^2)(u^2+v^2)$ oder

$$qr=\frac{\left[y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}-\alpha\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}\right)\right]^2}{1+\alpha^2}$$

$$+\frac{\left[\alpha\left(y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}\right]^2}{1+\alpha^2}\cdot$$

Hiernach stellen die Gleichungen

$$u=y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}-\alpha\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}\right)=0$$

$$v=\alpha\left(y-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{6}\sqrt[3]{ab^2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{ab^2}=0$$

alle möglichen Paare von zugeordneten Durchmessern dar, wenn man α nach einander alle möglichen Werthe beilegt.

Setzt man Beispiels halber $\alpha=-\sqrt{3}$, so bekommt man für $u=0$ die Gleichung $y=-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}x+\frac{2}{3}\sqrt[3]{ab^2}$ d.h. einen Durchmesser U, welcher parallel der reellen Asymptote MN ist.

Die Gleichung $v=0$ geht für diesen Fall über in $y=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.x$, welche Gleichung den zugeordneten Durchmesser V repräsentirt.

Durch diese Betrachtung sind wir auch in den Stand gesetzt, beliebig viele Punkte unserer Curve geometrisch zu bestimmen.

Die Gleichung $pqr+\mu s=0$ lässt sich nämlich umwandeln in $p(qr+\gamma^2)+\mu s-p\gamma^2$, welcher Gleichung die Werthe 1) $p=0$ und zugleich $\mu s-p\gamma^2=0$ und 2) $qr+\gamma^2=0$ und zugleich $\mu s-p\gamma^2=0$ genügen.

Die Gleichungen 1) geben eine Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt S der beiden Linien $p=0$ und $s=0$ geht, die Gleichungen 2) geben uns die Durchschnittspunkte der Geraden $\mu s-p\gamma^2=0$ mit der Ellipse $qr+\gamma^2=0$. In

Fig. VII. ist die Linie p=0 durch MN und s=0 durch FG repräsentirt.

Man kann nun die Constante γ^2 so bestimmen, dass die Ellipse durch einen schon bekannten Punkt der zu construirenden Curve geht. So ist z. B. $y=0$, $x=\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, welche Werthe den Punkt P geben.

Setzt man also in

$$y^2-\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}\,yx-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}\,y+\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab^2}\,x^2-\frac{b}{3}x+\frac{b}{9}\sqrt[3]{a^2b}+\gamma^2=0$$

$y=0$, $x=\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, so wird $\gamma^2=\frac{1}{3}\sqrt{c^3b}-\frac{c^3}{ab}\sqrt[3]{ab^2}-\frac{b}{9}\sqrt[3]{a^2b}$.

Hiernach ist die Gleichung der Ellipse, welche durch den Punkt P geht,

$$y^2-\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}yx+\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab^2}\,x^2-\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}y-\frac{b}{3}x=\frac{c^3}{ab}\sqrt[3]{ab^2}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{bc^3}.$$

Es repräsentirt dann die Gleichung $\mu s-p\gamma^2=0$ die gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt S der Geraden $P=0$, $\mu s=0$ und durch den Punkt P geht.

Um die Gleichung der zu construirenden Ellipse zu vereinfachen, verlegen wir das Coordinatensystem nach dem Asymptotenpunkte A, d. h. wir setzen $y=\varphi+\frac{1}{3}\sqrt[3]{ab^2}$, $x=\psi+\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b}$, wodurch wir die Gleichung erhalten:

$$\varphi=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\psi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{9}b\sqrt[3]{a^2b}-\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{c^3}{b}}+\frac{4c^3}{ab}\sqrt[3]{ab^2}\right)-\frac{3}{a}\sqrt[3]{ab^2}\psi^2}.$$

Ist nun die krumme Linie PBC die verlangte Ellipse, welche durch den Punkt P geht, so ist der Durchschnittspunkt Q dieser Ellipse mit der Geraden SP ein Punkt unserer Curve.

Für $y=0$, $x=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ wird

$$\varphi=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\psi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{9}b\sqrt[3]{a^2b}+\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{c^3}{b}}+\frac{4c^3}{ab}\sqrt[3]{ab^2}\right)-\frac{3}{a}\sqrt[3]{ab^2}\psi^2}.$$

Ist die krumme Linie $P_1B_1C_1$ die Ellipse, welche durch den bekannten Punkt $P_1\left(\begin{matrix}x=0\\y=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}\end{matrix}\right)$ geht, so ist der Durchschnittspunht Q_1 dieser Ellipse mit der Geraden SP_1 wieder ein Punkt der fraglichen Curve.

§. 5.

Die Tangente der Curve.

Um die Gleichung der Tangente auf rein analytischem Wege für einen Punht A (x_1y_1) aufzustellen, nehmen wir noch einen Punkt B (x_2y_2) zu Hülfe; dann ist die Gleichung einer Geraden, welche durch diese beiden Punkte geht, $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$. Zur Bestimmung des Coefficienten $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, welcher die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Sekante AB mit der Achse bildet, dienen uns, da beide Punkte der Curve angehören, die Bedingungsgleichungen 1) $ay_1^3-abx_1y_1+bx_1^3-c^3x_1-c^3y_1=0$ und

3) $ay_2^3-abx_2y_2+bx_2^3-c^3x_2-c^3y_2=0$.

Hieraus folgt, wenn man 2) von 1) subtrahirt,

$a(y_1^3-y_2^3)-ab(x_1y_1-x_2y_2)+b(x_1^3-x_2^3)-c^3(x_1-x_2)-c^3(y_1-y_2)=0$

oder $a(y_1-y_2)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)-ab[y_1(x_1-x_2)+x_2(y_1-y_2)]$

$+b(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-c^3(x_1-x_2)-c^3(y_1-y_2)=0$,

demnach $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{aby_1-b(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+c^3}{a(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)-abx_2-c^3}$.

Die Gleichung der Sekante AB ist also:

$$y-y_1=\frac{aby_1-b(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+c^3}{a(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)-abx_2-c^3}(x-x_1).$$

Lässt man nun die Sekante AB sich um den Punkt A so drehen, dass B mit A zusammenfällt, so geht die Sekante in die Tangente über und es wird dann $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, mithin die Gleichung der Tangente für einen Punkt A (x_1y_1) $y-y_1=\frac{aby_1-3bx_1^2+c^3}{3ay^2-abx_1-c^3}(x-x_1)$, oder wenn man die Multi-

plication ausführt, $y(3ay_1^2 - abx_1 - c^3) = -x(3bx_1 - aby_1 - c^3) + 3ay_1^3 - 2abx_1y_1 + 3bx_1^3 - c^3(x_1 + y_1)$. Addirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung $-abx_1y_1 - 2c^3(x_1 + y_1)$ und bedenkt, dass $3ay_1^3 - 3abx_1y_1 + 3bx_1^3 - 3c^3(x_1 + y_1) = 0$ ist, so wird die Gleichung der Tangentiallinie

$$y = -\frac{3bx_1^2 - abx_1 - c^3}{3ay_1^2 - abx_1 - c^3}x + \frac{abx_1y_1 + 2c^3(x_1 + y_1)}{3ay_1^2 - abx_1 - c^3}.$$

Aufgabe: *An einen Punkt A $(x_1\, y_1)$ der gegebenen Curve eine Tangente zu ziehen.*

Die Coordinaten x_1 und y_1 bestimmen als bekannte Grössen den Berührungspunkt, und es ist daher nur noch ein Punkt der Tangentiallinie zu bestimmen. Es möge nun der zweite Punkt auf der y-Achse liegen, dann ist $x = 0$, mithin geht die Gleichung der Tangente über in

$$y - y_1 = \frac{3bx_1^2 - aby_1 - c^3}{3ay_1^2 - abx_1 - c^3}x_1, \text{ oder } y = y_1 - \frac{x_1^2 - \frac{ay_1}{3} - \frac{c^2}{b}\cdot\frac{c}{3}\,b}{\frac{c^2}{a}\cdot\frac{c}{3x_1} + \frac{b}{3} - \frac{y_1^2}{x_1}\cdot a},$$

welcher Ausdruck leicht zu construiren ist.

Ist $OB = x_1$, $AB = y_1$ (Fig. VIII), dann ist das über OB beschriebene Quadrat $OC = x_1^2$. Verwandelt man nun dieses Quadrat in ein Rechteck, dessen eine Seite $= y_1$ ist, d. h. zieht man OA bis zum Schnittpunkte D der verlängerten Geraden ED, fällt von D eine Senkrechte DF auf die x-Achse, zieht durch A die zu OX parallele Gerade GH, wodurch Rechteck $OH = OC$ oder $OF \cdot y_1 = x_1^2$ wird, und macht man $JF = \frac{a}{3}$, zieht $JK \parallel FD$, dann ist Rechteck

1) $OK = OH - JH = x_1^2 - \frac{a}{3}y_1$.

Um den Ausdruck $\frac{c^2}{b}\cdot\frac{c}{3}$ zu construiren, sucht man zu b und c die 3. Proportionale $= m$ und man erhält dadurch das Rechteck $m \cdot \frac{c}{3}$. Ist $OL = b$, $OM = c$, dann ist, wenn $MN \perp ML$, $ON = \frac{c^2}{b} = m$ und wenn $OP = \frac{c}{3}$ ist, Rechteck

$OQ = \frac{c^2}{b} \cdot \frac{c}{3} = m \cdot \frac{c}{3}$. Um dieses Rechteck von dem Rechtecke $\left(x_1^2 - \frac{a y_1}{3}\right) = OK$ subtrahiren zu können, verwandelt man es in ein anderes OR, dessen eine Seite $OG = y_1$ ist, zu welchem Zwecke man OS bis zum Schnittpunkte T der Geraden NQ und durch T die Linie $TU \| ON$ zieht. Hiernach wird

2) $UK = OH - JH - OR = x_1^2 - \frac{a y_1}{3} - \frac{c^2}{b} \cdot \frac{c}{3} = UJ \cdot y_1$.

Der Divisor wird auf folgende Weise construirt:

Man macht $OV = a$, verbindet V mit M und errichtet im Punkte M auf MV die Senkrechte MW, dann ist $OW = \frac{c^2}{a}$, wonach $\frac{c^2}{a} \cdot \frac{c}{3x_1}$ übergeht in $\frac{OW \cdot c}{3x_1} = n$ oder $x_1 : \frac{c}{3} = OW : n$. Verbindet man also W mit B und zieht $PA_1 \| BW$, dann ist $n = 0A_1 = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{c}{3x_1}$ und $OB_1 = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{c}{3x_1} + \frac{b}{3}$, wenn $A_1B_1 = \frac{b}{3}$ ist. Ist weiter $AC_1 \perp OA$, dann ist $BC_1 = \frac{y_1^2}{x_1}$, und macht man $B_1D_1 = BC_1 = \frac{y_1^2}{x_1}$, so ist

3) $A_1D_1 = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{c}{3x_1} + \frac{b}{3} - \frac{y_1^2}{x_1}$.

Nach 2) und 3) wird jetzt $y = y_1 - \frac{UJ \cdot y_1}{A_1D_1} \cdot \frac{b}{a}$.

Sucht man nun zu UJ, y_1 und A_1D_1 die 4. Proportionale, zu welchem Zwecke man $OF_1 = UJ$, $OE_1 = A_1D_1$ macht, F_1 mit E_1 verbindet und $GH_1 \| EF_1$ zieht, dann ist $y = y_1 - 0H_1 \cdot \frac{b}{a}$ und verbindet man V mit H_1, zieht $LJ_1 \| VH_1$, dann ist $OJ_1 = OH_1 \cdot \frac{b}{a}$, also $y = y_1 - OJ_1$ oder $y = -OK_1$, wenn $J_1K_1 = y_1$ ist.

Hiernach ist L_1 der zweite Punkt der zu suchenden Tangentiallinie, wenn $OL_1 = OK_1$ ist, mithin L_1A die verlangte Tangente.

Einfacher gestaltet sich der Ausdruck

$y-y_1=\frac{3bx_1^2-aby_1-c^3}{3ay_1^2-abx_1-c^3}x_1$ für den Punkt A (Fig. IX), indem für diesen $y_1=0$, $x_1=+\sqrt{\frac{c^3}{b}}$ ist. Es wird dann

$$y=-\frac{2c^3\sqrt{\frac{c^3}{b}}}{ab\sqrt{\frac{c^3}{b}}+c^3}=-\frac{2c^2}{\frac{ab}{c}+\sqrt{cb}}.$$

Ist nun OB=C, OC=b, OD=a, so ist $OE=\frac{ab}{c}$, wenn CE‖BD gezogen ist. Beschreibt man weiter über OC=b einen Halbkreis, errichtet in B auf OC die Senkrechte BF, dann ist $OF=\sqrt{cb}$, mithin, wenn OG=OF ist, $GE=\frac{ab}{c}+\sqrt{cb}$, wonach $y=\frac{-2c^2}{GE}$ oder $y=\frac{-c^2}{OH}$ wird, wenn $OH=\frac{1}{2}GE$ ist. Ist demnach BJ ⊥ HB, so ist $OJ=\frac{c^2}{OH}$ und OK=—y, wenn OJ=OK ist, wonach KA Tangente im Punkte A ist.

Für den Punkt O ist $x_1=0$, $y_1=0$, wonach

$y-y_1=-\frac{3bx_1^2-aby_1-c^3}{3ay_1^2-abx_1-c^3}(x-x_1)$ übergeht in $y=-x$ oder $\frac{y}{x}=-1$ oder $tg\varphi=-1$, d. h. die Tangentiallinie bildet mit den Coordinaten einen Winkel von 45° und liegt im 2. und 4. Quadranten, da ja für diese Quadranten die trigonometrische Tangente negativ ist. Es repräsentirt also die Linie MN die Tangente des Punktes Q.

Aus der Gleichung der Tangente findet man die der Normallinie für einen Punkt P (x_1y_1)

$$y-y_1=\frac{3ay_1^2-abx_1-c^3}{3bx_1^2-aby_1-c^3}(x-x_1).$$

Aufgabe: *Aus den Gleichungen der Tangential- und der Normallinie die Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale zu finden.*

Bestimmt man aus der Gleichung der Tangentiallinie für einen Punkt P (ξ,η) $y-\eta=-\frac{3b\xi^2-ab\eta-c^3}{3a\eta^2-ab\xi-c^3}(\xi-\eta)$ die

Abscisse des Durchschnittspunktes Q dieser Linie mit der Abscissenachse, d. h. setzt man $y=0$, $x=x_1$, so wird $x_1=\frac{3a\eta^2-ab\xi-c^3}{3b\xi^2-ab\eta-c^3}\eta+\xi$. Es ist nun die Subtangente QR oder nach der gebräuchlichen Bezeichnung

$$St=\xi-x_1=\xi-\left(\xi+\frac{3ay^2-ab\xi-c^3}{3b\xi^2-ab\eta-c^3}\eta\right)=-\frac{3a\eta^2-ab\xi-c^3}{3b\xi^2-ab\eta-c^3}\eta.$$

Bestimmt man aus der Gleichung der Normallinie, welche durch den Punkt P (ξ,η) geht, den Durchschnittspunkt S dieser Linie mit der Abscissenachse, indem man $y=0$, $x=x_2$ setzt, so wird $x_2=\xi-\frac{3b\xi^2-ab\eta-c^3}{3a\eta^2-ab\xi-c^3}\eta$, mithin ist die Subnormale RS oder $Sn=x_2-\xi=\xi-\frac{3b\xi^2-ab\eta-c^3}{3a\eta^2-ab\xi-c^3}\eta-\xi$, also $Sn=-\frac{3b\xi^2-ab\eta-c^3}{3a\eta^2-ab\xi-c^3}\eta$.

Es ist hiernach die Tangente $PQ=\sqrt{\eta^2+QR^2}$ oder $T=\sqrt{\eta^2+St^2}=\eta\sqrt{1+\left(\frac{3a\eta^2-ab\xi-c^3}{3b\xi^2-ab\eta-c^3}\right)^2}$ und die Normale $PS=\sqrt{\eta^2+RS^2}$ oder

$$N=\sqrt{\eta^2+Sn^2}=\eta\sqrt{1+\left(\frac{3b\xi^2-ab\eta-c^3}{3a\eta^2-ab\xi-c^3}\right)^2}.$$

Wendet man bei der Bestimmung der Tangentiallinie die Differential-Rechnung an, so ist die Gleichung derselben $y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)$ oder $y-y_1=-\frac{3bx_1^2-aby_1-c^3}{3ay_1^2-abx_1-c^3}(x-x_1)$, und die Gleichung der Normallinie

$$y-y_1=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}(x-x_1)=\frac{3ay_1^2-abx_1-c^3}{3bx_1^2-aby_1-c^3}(x-x_1),$$ und bedenkt man, dass $tg\,\alpha=\frac{dy_1}{dx_1}$ ist, so wird

$$St=\frac{y_1}{tg\alpha}=\frac{y_1}{\frac{dy_1}{dx_1}}=-\frac{3ay_1^2-abx_1-c^3}{3bx_1^2-aby_1-c^3}y_1,$$

$$Sn=y_1.tg\alpha=y_1\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{3bx_1^2-aby_1-c^3}{3ay_1^2-abx_1-c^3}y_1.$$

Obige Werthe für die Subtangenten, Subnormalen u. s. w. liefern zur Construction der Tangente nicht bequemere Ausdrücke, als wie wir sie Seite 28 benutzt haben, wesshalb wir keine weitere Construction machen wollen.

§. 6.

Krümmungskreis und Evolute.

Es sei die Gleichung eines Kreises $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \varrho^2$, dann ist der Radius des Krümmungskreises für einen Punkt $P(x_1 y_1)$ einer Curve $\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}$ und die Coordinaten seines Mittelpunktes

$$y_1 - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}, \quad x_1 - \alpha = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]\frac{dy_1}{dx_1}}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}.$$

Für unsern speciellen Fall ist nun

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{3bx_1^2 - aby_1 - c^3}{3ay_1^2 - abx_1 - c^3} \text{ und}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -\frac{2}{(3ay_1^2 - abx_1 - c^3)^3}\Big[9\,abc^3 x_1^2 y_1 + 9\,abc^3 x_1 y_1^2 + 3a^2bc^3y_1^2 + 3ab^2c^3x_1^2 + a^3b^3x_1y_1 + (a^2b^2c^3 + 3bc^6)x_1 + (a^2b^2c^3 + 3ac^6)y_1 + abc^6\Big],$$

mithin ist, wenn man die Grösse in der eckigen Klammer mit M bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{3bx_1^2 - aby_1 - c^3}{3ay_1^2 - abx_1 - c^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{-2M}{(3ay_1^2 - abx_1 - c^3)^3}} \text{ oder}$$

$$1)\ \varrho = -\left\{\frac{[3ay_1^2 - abx_1 - c^3)^2 + (3bx_1^2 - aby_1 - c^3)^2]}{2M} \times \sqrt{(3ay_1^2 - abx - c^3)^2 + (3bx_1^2 - aby - c^3)}\right.$$

2) $y_1-\beta=-\frac{[(3bx_1^2-aby_1-c^3)^2+(3ay_1^2-abx_1-c^3)][3ay_1^2-abx_1-c^3]}{2M}$

3) $x_1-\alpha=\frac{[(3bx_1^2-aby_1-c^3)^2+(3ay_1^2-abx_1-c^3)^2][3bx_1^2-aby_1-c^3]}{2M}$

Lässt man in den Gleichungen 2) und 3) die Marken verschwinden, sucht aus ihnen die Werthe von x und y und substituirt dieselben in die Gleichung $ay^3-abxy+bx^3-c^3(x+y)=0$, so bekommt man den geometrischen Ort für alle Mittelpunkte des Krümmungskreises d. h. die Evolute unserer Curve. Da jedoch diese Operation zu weit führen würde, wollen wir sie unterlassen und uns darauf beschränken, für einige Punkte der Curve den Krümmungsmittelpunkt und Radius zu bestimmen.

Für den Punkt O (Fig. X) ist $x_1=0$, $y_1=0$, mithin die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$-\beta=-\frac{(c^6+c^6)(-c^3)}{-2abc^6} \quad \text{oder} \quad \beta=\frac{c^3}{ab}=0{,}666\ldots$$

$$-\alpha=-\frac{(c^6+c^6)(-c^3)}{-2abc^6} \quad \text{oder} \quad \alpha=\frac{c^3}{ab}=0{,}666\ldots$$

$$\varrho=-\frac{2c^6\cdot\pm c^3\sqrt{2}}{2abc^6}=+\frac{2c^9\sqrt{2}}{2abc^6}=\frac{c^3\sqrt{2}}{ab}=0{,}9428.$$

(Da der Radius positiv ist, kann man nur setzen $\sqrt{c^6+c^6}=-c^3\sqrt{2}$).

Für den Punkt A $\left(y_1=0,\ x_1=\sqrt{\frac{c^3}{b}}\right)$ ist $\alpha_1=0{,}25$, $\beta_1=2{,}38$, $\varrho_1=2{,}75$.

Für den Punkt B $\left(x_1=0,\ y_1=\sqrt{\frac{c^3}{a}}\right)$ ist $\alpha_2=1{,}897$, $\beta_2=0{,}188$, $\varrho_2=2{,}16$.

Die bezüglichen Mittelpunkte der Krümmungskreise sind demnach C, D und E.

§. 7.

Die Quadratur der Curve.

Die Fläche OSUM (Fig. XI) zwischen den Ordinaten OM und SU für die ihnen zugehörigen Abscissen x_0 und x_1 ist $U = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$.

Um nun die Gleichung $ay^3+bx^3=abxy+c^3(x+y)$ auf eine für die Integration bequeme Form zu bringen, setze man $y=ux$, wonach

$$x = \frac{abu \pm \sqrt{4bc^3+4bc^3t+a^2b^2t^2+4ac^3t+4ac^3u^4}}{2(b+au^3)^2}$$ wird.

Bezeichnet man die Grösse unter dem Wurzelzeichen mit ω, so wird

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{(b+au^3)\left[ab+\frac{1}{2}\frac{d\omega}{\omega}\right]-(abu+\sqrt{\omega})\,3ay}{(b+au^3)^2}\,dy.$$

Bedenkt man nun, dass $d\omega = 4bc^3+2a^2b^2u+12ac^3u^2+16ac^3u^3$ ist, so wird nach leichter Umformung

$$dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{(b+au^3)[ab\sqrt{\omega}+2bc^3+a^2b^2u+6ac^3u^2+8ac^3u^3)}{(b+au^3)^2\sqrt{\omega}}\,du \\ -\frac{(abu\sqrt{\omega}+\omega)\,3au^2}{(b+au^3)^2\sqrt{\omega}}du \text{ und} \end{cases}$$

$$ydx = \begin{cases} \frac{1}{4}u\,\frac{(abu+\sqrt{\omega})\,(b+au^3)\,(ab\sqrt{\omega}+2bc^3+a^2b^2u+6ac^3u^2}{(b+au^3)\sqrt{\omega}} \\ \frac{+8ac^3u^3)-(abu+\sqrt{\omega})^2.\,3au^2.\,\sqrt{\omega}}{(b+au^3)\sqrt{\omega}}\,du \text{ oder für } \omega \text{ der} \end{cases}$$

Werth eingesetzt,

$$ydx = \begin{cases} \frac{1}{4}u\,\frac{(2b^2c^3+2a^2b^3u-6ab^3u^2-4a^3b^2u^4-6a^2c^3u^5-4a^2c^3u^6)\sqrt{\omega}}{(b+au^3)^3\sqrt{\omega}} \\ \frac{+4ab^3c^3+6ab^3c^3u+2a^3b^4u^2-10a^2b^2c^3u^3-6a^2b^2c^3u^4}{(b+au^3)^3\sqrt{\omega}} \\ \frac{-4a^4b^3u^5-14a^3bc^3u^6-12a^3bc^3u^7}{(b+au^3)^3\sqrt{\omega}}\,du \text{ oder} \end{cases}$$

$$ydx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}b^2c^3u}{(b+au^3)^3} + \frac{\frac{1}{2}a^2b^3u^2}{(b+au^3)^3} - \frac{\frac{3}{2}abc^3u^3}{(b+au^3)^3} - \frac{\frac{1}{2}abc^3u^4}{(b+au^3)^3} \\ - \frac{a^3b^2u^5}{(b+au^3)^3} - \frac{\frac{3}{2}a^2c^3u^6}{(b+au^3)^3} - \frac{a^2c^3u^7}{(b+au^3)^3} \\ + \frac{(4bc^3+4bc^3u+a^2b^2u^2+4ac^3u^3+4ac^3u^4)^{-\frac{1}{2}}}{(b+au^3)^3} \times \\ (4ab^3c^3+6ab^3c^3u+2a^3b^4u^2-10a^2b^2c^3u^3-6a^2b^2c^3u^4 \\ -4a^4b^3u^5-14a^3bc^3u^6-12a^3bc^3u^7). \end{array} \right.$$

Entwickelt man nun $(4bc^3+4bc^3u+a^2b^2u^2+4ac^3u^3+4ac^3u^4)^{-\frac{1}{2}}$ in eine unendliche Reihe und führt die Multiplication aus, so erhält man eine Reihe von Gliedern von der Form $A+Bu+Cu^2+Du^3+\ldots.$, welche alle den Nenner $(b+au^3)^3$ haben und bei welchen A, B, C u. s. w. constante positive oder negative Grössen sind. Die Integrale aller dieser Glieder erscheinen dann unter der Form $M\int \frac{u^m}{b+au^3)^3}$, wo $m=0$ oder eine ganze positive Zahl und M eine Constante ist. Die Integration ist demnach durchführbar, die Rechnung jedoch sehr lang und die Reihe selbst wenig convergirend, so dass man nur langsam zum Ziele kommt.

Kürzer finden wir den Inhalt der Ovale, wenn man die von Simpson angegebene Methode der Quadratur anwendet.

Wir betrachten hiernach die Ovale als eine aus einzelnen Parabelbögen zusammengesetzte Linie und bestimmen die Flächeninhalte dieser einzelnen Parabeln. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt A mit K, für welche Punkte bezüglich $\frac{dy}{dx}=\infty$ und $\frac{dy}{dx}=0$ war, mit einander, dann ist Bogen AOK eine Parabel, deren Achse OH ist und wo AH=HK angenommen werden kann. Zieht man dann KC ⊥ OX, verbindet A mit C, so haben wir wieder eine Parabel ADB, deren Achse die in der Mitte von AC errichtete Senkrechte BD ist. Verbindet man ebenso K_1 mit A_1, für welche Punkte bezüglich $\frac{dy}{dx}=0$ und $\frac{dy}{dx}=\infty$ war, dann erhält

man die Parabel $A_1O_1K_1$ und durch die Ordinate K_1F_1 den Parabelbogen $C_1D_1A_1$.

Es ist nun der Flächeninhalt des Parabelstückes AHKO, was wir mit A)AHKO bezeichnen wollen, $A)AHKO = \frac{2}{3}OH.AK$. Betrachtet man nun den kleinen Bogen OJ als gerade Linie, dann ist OHJ ein rechtwinkliges Dreieck und $OHJ \sim AEK$, mithin $OH : HJ = AE : AK$ oder $OH . AK = HJ . AE$, wonach $A)AHKO = \frac{2}{3}HJ . AE$ wird.

Analog ist $A_1)ABCD = \frac{2}{3}DB . AC$, oder da $\triangle DBG \sim AEC$, also $DB : BG = AE : AC$ ist, $A_1)ABCD = \frac{2}{3} BG . AE$.

Hiernach $A + A_1 = \frac{2}{3}AE(HJ + BG)$ oder, da $HJ + BG = JG - HB = JG - \frac{1}{2}KC$ ist, $A + A_1 = \frac{2}{3}AE(GJ - \frac{1}{2}KC)$.

Nun ist $\triangle AKC = \frac{1}{2}AE . CK$, demnach

1) Fläche $AOKCD = \frac{2}{3} AE(GJ - \frac{1}{2} KC) + \frac{1}{2} AE . CK$

$$= \frac{AE}{6}(4GJ + KC).$$

Ganz analog findet man

2) Fläche $A_1O_1K_1C_1D_1 = \frac{A_1E_1}{6}(4G_1J_1 + K_1C_1)$.

Theilt man nun FF_1 in 4 gleiche Theile und zieht in den Theilungspunkten die betreffenden Ordinaten, so erhält man wieder 4 Parabelbögen und Trapeze, deren Inhalt leicht zu bestimmen ist.

Es ist $A_2)KLNP = \frac{2}{3} LP . QN = \frac{2}{3} (LS - SP) FR$

$$= \frac{2}{3} \left[LS - \frac{1}{2} (FK + NR) \right] FR.$$

Paralleltrapez $KNRF = \frac{1}{2} FR(FK + NR)$, mithin

3) Fläche $KLNRF = \frac{2}{3}\left[LS - \frac{1}{2}(FK+NR)\right]FR + \frac{1}{2}FR(FK+NR)$

$$= \frac{FR}{6}(4LS+KF+RN).$$

Weiter ist

$A_3)CTVU = \frac{2}{3}\,CZ\,.\,UT = CZ\left(\frac{2}{3}(UW-WT)\right)$

$$= CZ\,.\,\frac{2}{3}(UW - \frac{1}{2}VZ)$$

$$= \frac{CZ}{3}(2UW-VZ) \text{ und}$$

Trapez $FRVC = \frac{1}{2}CZ(CF+VR)$, mithin

Fläche $FRVUC = \frac{CZ}{3}(2UW-VZ) + \frac{1}{2}CZ(CF+VR)$.

Hiernach, da $CZ = FR$ ist,

4) Fläche $KLNVUC = FR\left(\frac{2}{3}LS + \frac{1}{6}KF + \frac{1}{6}RN + \frac{2}{3}UW - \frac{1}{3}VZ\right.$

$$\left. + \frac{1}{2}FC + \frac{1}{2}VR\right) = FR\left(\frac{2}{3}UL + \frac{1}{6}CK + \frac{1}{6}VN\right).$$

Ebenso ist

$A_4)NU_1C_1F_1 = \frac{2}{3}\,C_1Z_1U_1F_1 = \frac{2}{3}\,C_1Z_1\left(U_1W_1 - \frac{1}{2}Z_1N\right)$, und

$\triangle NC_1Z_1 = \frac{1}{2}\,C_1Z_1\,.\,Z_1N$, also

5) Fläche $NU_1C_1Z_1 = C_1Z_1\left(\frac{2}{3}U_1W_1 - \frac{1}{3}\,Z_1N + \frac{1}{2}\,C_1N\right)$

$$= C_1Z_1\left(\frac{2}{3}\,U_1W_1 + \frac{1}{6}\,C_1N\right).$$

$A_5)VL_1K_1P_1 = \frac{2}{3}\,L_1P_1\,.\,VQ = VQ\left(\frac{2}{3}L_1S_1 - \frac{1}{3}\,K_1Q_1\right)$ und

Trapez $VK_1C_1Z_1 = \frac{1}{2}(VZ_1+C_1K_1)VQ$, also, da $C_1Z_1 = VQ$ ist,

6) Fläche $NU_1C_1K_1L_1V = C_1Z_1\left(\frac{2}{3}\,U_1W + \frac{1}{6}\,C_1N + \frac{2}{3}\,U_1W_1\right.$

$$\left. + \frac{1}{6}\,C_1N + \frac{1}{2}VZ_1 + \frac{1}{2}C_1K_1\right) = C_1Z_1\left(\frac{2}{3}U_1L_1 + \frac{1}{6}VN + \frac{1}{6}K_1C_1\right).$$

Hiernach erhält man durch Zusammenstellung von 1),

2), 4) und 6), da ja $C_1Z_1 = FR = \frac{1}{2}FF_1$ ist, als Gleichung für den Flächeninhalt der Ovale

$$OKA_1K_1 = \frac{AE}{6}(4GJ + KC) + \frac{FF_1}{6}(2NL + VN + \frac{1}{2}CK + 2U_1L_1 + \frac{1}{2}C_1K_1) + \frac{A_1E_1}{6}(4G_1J_1 + K_1C_1).$$

Setzt man in der Gleichung $ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x + y)$ die Constante $c = 0$, so wird $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$ und $ydx = \frac{a^2b^3u^2 - 2a^3b^2u^5}{(b + au^3)^3}du$ und

$$\int ydx = a^2b^3\int\frac{u^2du}{(b + au^3)^3} - 2a^3b^2\int\frac{u^5du}{(b + au^3)^3}.$$

Setzt man zur Lösung dieser Integrale $b + au^3 = z$, so ist $3au^2du = dz$, mithin $u^2du = \frac{1}{3}a\,dz$, wonach

$$\int\frac{u^2du}{(b + au^3)^3} = \frac{1}{3a}\int\frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{6a}\cdot\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{6a}\cdot\frac{1}{(b + au^3)^2}, \text{ also}$$

$$1)\quad a^2b^3\int\frac{u^2du}{(b + au^3)^3} = -\frac{ab^3}{6(b + au^3)^2} \text{ wird.}$$

Aus $b + au^3 = z$ folgt $u^3 = \frac{z - b}{a}$ und $u^2du = \frac{dz}{3a}$, mithin

$$\int\frac{u^5du}{(b + au^3)^3} = \int\frac{\frac{(z - b)}{a}\frac{dz}{3a}}{z^3} = \frac{1}{3a^2}\int\frac{dz}{z^2} - \frac{b}{3a^2}\int\frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{3a^2}\frac{1}{z} + \frac{b}{6a^2}\cdot\frac{1}{z^2}, \text{ also}$$

$$2)\quad -2a^3b^2\int\frac{u^5du}{(b + au^3)^3} = \frac{2ab^2}{3(b + au^3)} - \frac{ab^3}{3(b + au^3)^2}.$$

Durch Zusammenstellung von 1) und 2) ergibt sich $\int ydx = \frac{2}{3}\frac{ab^2}{b + au^3} - \frac{1}{2}\frac{ab^3}{(b + au^3)^2} + C$, oder da $y = ux$, also $u = \frac{y}{x}$ ist, $\int ydx = \frac{2bx^2}{3y} - \frac{bx^4}{2ay^2} + C$.

Die Constante C hängt von dem Verhältnisse der im Punkte A (Fig. III), von welchem Punkte an der Flächenraum beginnen soll, verschwindenden x und y ab.

Aus $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$ folgt aber $\frac{y^3}{x^3} - \frac{by}{x^2} + \frac{b}{a} = 0$ und $\frac{x^3}{y^3} - \frac{ax}{y^2} + \frac{a}{b} = 0$, d. h. das Grenzverhältniss der in A verschwindenden x und y ist 1) $x^2 = ay$ und 2) $y^2 = bx$.

Die Gleichung 1) gehört einer Parabel an, deren Achse die Ordinaten-, die Gleichung 2) einer Parabel, deren Achse die Abscissenachse ist, das ist: Die Gleichung $x^2 = ay$ ist die Grenzgleichung des Bogens EAD und $y^2 = bx$ die des Bogens CAF.

Hiernach hat man für den Flächeninhalt ABD, wenn $x^2 = ay$ gesetzt wird,

Fläche $ABD = \frac{\frac{2bx^2}{3}}{a} - \frac{\frac{bx^4}{2}}{a} + C = \frac{1}{6}ab + C$ und lässt man die Fläche zu Null werden, $0 = \frac{1}{6}ab + C$ oder $C = -\frac{1}{6}ab$.

Für den Flächenraum, welcher durch die Abscissenachse und den Bogen EAD begrenzt wird, ist also die Constante $C = -\frac{1}{6}ab$ und es gilt demnach für die Fläche ABD die Relation $U = \frac{2}{3}\frac{bx^2}{y} - \frac{b}{2a}\cdot\frac{x^4}{y^2} - \frac{1}{6}ab$.

Weiter ist, da für den Bogen FAC die Grenzgleichung $y^2 = bx$ oder $y = \sqrt{bx}$ gilt,

Fläche $ABC = \frac{2bx^2}{3\sqrt{bx}} - \frac{bx^4}{2abx} + C$ und lässt man jetzt die Fläche zu Null werden, so ist $x = 0$, und $0 = 0 + C$ oder $C = 0$. d. h.:

Für den Flächenraum, welcher durch die Abscissenachse und den Bogen CAF begrenzt wird, ist die Constante $C = 0$ und es gilt für die Fläche ABC die Relation

$$U_1 = \frac{2}{3}\frac{bx^2}{y} - \frac{b}{2a}\frac{x^4}{y^2}.$$

Für den Punkt G, in welchem die Ordinate GH Tangente ist, ist $\measuredangle AHG = R$, also $\frac{dy}{dx} = \infty$ oder $\frac{3bx_1^2 - aby_1}{3ay_1^2 - abx_1} = \infty$, mithin $3ay_1 - abx_1 = 0$ oder $x_1 = \frac{3y_1^2}{b}$.

Durch Substitution dieses Werthes in die ursprüngliche Gleichung $ay^3 - abxy + bx^3 = 0$ findet man $y_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2ab^2}$ und $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4a^2b}$.

Hiernach ist, wenn man diese Werthe in die für den Inhalt der Fläche gefundene Gleichung

$$U = \frac{2}{3} \cdot \frac{bx^2}{y} - \frac{b}{2a}\frac{x^4}{y^2} - \frac{1}{6}ab \text{ substituirt,}$$

1) Fläche $AHG = \frac{4ab}{9} - \frac{2}{9}ab - \frac{1}{6}ab = \frac{1}{18}ab.$

und für die Fläche AHGC, für welche die Gleichung $U_1 = \frac{2}{3}\frac{bx^2}{y} - \frac{b}{2a}\frac{x^4}{y^2}$ gilt,

2) Fläche $AHGC = \frac{4}{9}ab - \frac{2}{9}ab = \frac{2}{9}ab.$

Aus 1) und 2) folgt nun der Flächeninhalt der Ovale

$$ADGC = AHGC - AHGD = \frac{2}{9}ab - \frac{1}{18}ab = \frac{1}{6}ab.$$

Weiter ist der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks

$$AHG = \frac{AH \,.\, HG}{2} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{4a^2b}}{2} = \frac{1}{9}ab, \text{ also Fläche}$$

$$ADGJ = \text{Fläche } AHGD = \frac{1}{2} \text{ Fläche } AJGC.$$

Man kann zur Bestimmung der Constante noch einen andern Weg einschlagen. Es ist nämlich $u = \frac{y}{x} = tg\varphi$, also $\int ydx = \frac{2ab^2}{3(b + atg\varphi^3)} - \frac{ab^3}{2(b+atg\varphi^3)^2} + C$. Für den Bogen EAD gilt nun in A die Gleichung $tg\varphi = 0$ und für den Bogen CAF die Gleichung $tg\varphi = \infty$, mithin ist 1) Fläche $0 = \frac{1}{6}ab + C$, also $C = -\frac{1}{6}ab$, 2) Fläche $0 = 0 + C$, also $C = 0$, und es gilt daher für die Fläche ABD die Gleichung

$$ABD = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab^2}{b+tg\varphi o^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^3}{(b+atg\varphi o^3)^2} - \frac{1}{6}ab \text{ und}$$

$$ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab^2}{b+atg\varphi_\infty{}^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^3}{(b+atg\varphi_\infty{}^3)^2}.$$

Für den Punkt G ist nun $tg\varphi = \frac{GH}{AH} = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$, mithin

$$AHGD = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab^2}{b + a\frac{b}{2a}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^3}{\left(b + a \cdot \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{6}ab = \frac{1}{18}ab,$$

$$AHGC = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab^2}{b + a\frac{b}{2a}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^3}{\left(b - a \cdot \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{2}{9}ab.$$

§. 8.

Inhalt des Rotationskörpers.

Lässt man die Curve sich um die x-Achse drehen, so entsteht ein Körper, dessen Cubikinhalt repräsentirt wird durch $V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$.

Für $y = ux$ haben wir nun nach Seite 41

$$ydx = \frac{a^2b^3u^2 - 2a^3b^2u^5}{(b + au^3)^3} du \text{ und } y = \frac{abu^2}{b + au^3}, \text{ mithin}$$

$$\pi \int y^2 dx = a^3b^4\pi \int \frac{u^4 du}{(b + au^3)^4} - 2a^4b^3\pi \int \frac{u^7 du}{(b + au^3)^4}.$$

Um das Integral $\int \frac{u^4 du}{(b + au^3)^4}$ zu lösen, wendet man die partielle Integration an. Setzt man nämlich

$$\int \frac{u^4 du}{(b + au^3)^4} = \int u^2 \cdot \frac{u^2 du}{(b + au^3)^4} = \int y dx_u = x \cdot y - \int x dy_u, \text{ wo}$$

$y = u^2$ und $dx_u = \frac{u^2 du}{(b + au^3)^4}$ ist, so wird a) $dy_u = 2udu$ und

b) $x = -\frac{1}{9a(b + au^3)^3}$, (denn für $b + au^3 = z$ wird $(b + au^3)^4 = z^4$ und $3au^2du = dz$ oder $u^2du = \frac{dz}{3a}$, also $\int \frac{u^2 du}{(b + au^3)^4} = \frac{1}{3a} \int \frac{dz}{z^4}$ $= -\frac{1}{9az^3} = -\frac{1}{9a(b + au^3)^3}$), mithin

1) $\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^4} = -\frac{u^2}{9a(b+au^3)^3} + \frac{2}{9a}\int \frac{udu}{(b+au^3)^3}$.

Setzt man, um das Integral

$\int \frac{udu}{(b+au^3)^3}$ zu lösen, $\frac{b-au^3+b+au^3}{2b} = 1$, so wird

$$\int \frac{udu}{(b+au^3)^3} = \frac{1}{2b}\int \frac{(b-au^3+b+au^3)udu}{(b+au^3)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{udu}{(b+au^3)^3} - \frac{a}{2b}\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^3} + \frac{1}{2b}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}, \text{ also}$$

$$\int \frac{udu}{(b+au^3)^3} = -\frac{a}{b}\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^3} + \frac{1}{b}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}.$$

Wendet man wieder die partielle Integration an, so wird $\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^3} = \int u^2 \frac{u^2 du}{(b+au^3)^3} = \int y dx_u = x \cdot y - \int x dy_u$,

wo $y = u^2$ und $dx_u = \frac{u^2 du}{(b+au^3)^3}$, so wird

$dy_u = 2udu$ und $x = -\frac{1}{6a(b+au^3)^2}$, mithin

$$\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^3} = -\frac{u^2}{6a(b+au^3)^2} + \frac{2}{6a}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}, \text{ wonach}$$

$$\int \frac{udu}{(b+au^3)^3} = -\frac{a}{b}\left[\frac{-u^2}{6a(b+au^3)^2} + \frac{1}{3a}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}\right]$$

$$+\frac{1}{b}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}, \text{ oder}$$

2) $\int \frac{udu}{(b+au^3)^3} = \frac{u^2}{6b(b+au^3)^2} + \frac{2}{3b}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2}$ wird.

Setzt man wieder $\frac{(b-au^3+b+au^3)}{2b}udu = udu$, so wird

$$\int \frac{udu}{(b+au^3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{udu}{(b+au^3)^2} - \frac{a}{2b}\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^2} + \frac{1}{2b}\int \frac{udu}{b+au^3}$$

$$= -\frac{a}{b}\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^2} + \frac{1}{b}\int \frac{udu}{b+au^3}. \quad \text{Es ist nun}$$

$$\int \frac{u^4 du}{(b+au^3)^2} = \int u^2 \frac{u^2 du}{(b+au^3)^2} = -\frac{u^2}{3a(b+au^3)} + \frac{2}{3a}\int \frac{udu}{b+au^3},$$

mithin

3) $\int \frac{udu}{(b+au^3)^2} = \frac{u^2}{3b(b+au^3)} + \frac{1}{3b}\int \frac{udu}{b+au^3}$.

Durch Zusammenstellung von 1), 2) und 3) erhält man nun

$$A)\ \int\frac{u^4du}{(b+au^3)^4}=-\frac{u^2}{9a(b+au^3)^3}+\frac{u^2}{27ab(a+au^3)^2}+\frac{4u^2}{81ab^2(b+au^3)}+\frac{4}{81ab^2}\int\frac{udu}{b+au^3}.$$

Um den zweiten Summanden des für $\int y^2dx$ gefundenen Werthes, nämlich $\int\frac{u^7du}{(b+au^3)^4}$ zu integriren, setzt man wieder

$$\int\frac{u^7du}{(b+au^3)^4}=\int u^5\cdot\frac{u^2du}{(b+au^3)^4}=\int ydx_u=x.y-\int xdy_u,$$ wo $y=u^5$ und $dx_u=\frac{u^2du}{(b+au^3)^4}$, also $dy_u=5u^4du$ und $x=-\frac{1}{9a(b+au^3)^3}$ ist, so wird

$$\int\frac{u^7du}{(b+au^3)^4}=-\frac{u^5}{9a(b+au^3)^3}+\frac{5}{9a}\int\frac{u^4du}{(b+au^3)^3}.$$

Nun war nach Seite 45

$$\int\frac{u^4du}{(b+au^3)^3}=-\frac{u^2}{6a(b+au^3)^2}+\frac{1}{3a}\int\frac{udu}{(b+au^3)^2}$$ und

$$\int\frac{udu}{(b+au^3)^2}=\frac{u^2}{3b(b+au^3)}+\frac{1}{3b}\int\frac{udu}{b+au^3},$$ mithin

$$B)\ \int\frac{u^7du}{(b+au^3)^4}=-\frac{u^5}{9a(b+au^3)^3}-\frac{5u^2}{54a^2(b+au^3)^2}+\frac{5u^2}{81a^2b(b+au^3)}+\frac{5}{81a^2b}\int\frac{udu}{b+au^3}.$$

Durch Zusammenstellung von A) und B) daher

$$C)\ \pi\int y^2dx=a^3b^4\pi\int\frac{u^4du}{(b+au^3)^4}-2a^4b^3\pi\int\frac{u^7du}{(b+au^3)^4}$$
$$=\frac{a^2b^2}{9}\pi\left[\frac{2abu^5}{(b+au^3)^3}-\frac{b^2u^2}{(b+au^3)^3}+\frac{2bu^2}{(b+au^3)^2}-\frac{2u^2}{3(b+au^3)}-\frac{2}{3}\int\frac{udu}{b+au^3}\right].$$

Um das Integral $\int\frac{udu}{b+au^3}$ zu lösen, setzt man

$$\int \frac{udu}{b+au^3} = \frac{1}{a}\int \frac{udu}{\frac{b}{a}+u^3}.$$

Bedenkt man nun, dass $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ ist, so findet man leicht, wenn man $\alpha^3=\frac{b}{a}$ oder $\alpha=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ setzt,

$$\frac{b}{a}+u^3=\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2\right), \text{ also wird}$$

$$\int \frac{udu}{b+au^3} = \frac{1}{a}\int \frac{udu}{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2\right)}.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche, indem man

$$\frac{u}{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2\right)} = \frac{Au}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u} + \frac{Bu^2+Cu}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2} \text{ setzt, findet man}$$

$$A=\frac{1}{3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}},\quad B=-\frac{1}{3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}},\quad C=\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}, \text{ mithin}$$

$$\frac{u}{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2\right)}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\left(\frac{u}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}+\frac{2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u-u^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2}\right).$$

Demnach ist 4) $\int \frac{udu}{b+au^3} = \frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int \frac{udu}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}$

$$+\frac{2}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\int\frac{udu}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}$$

$$-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int\frac{u^2du}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}.$$

Es ist nun, wenn man $\frac{u}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}=1-\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}$ setzt,

$$5)\quad \frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int\frac{udu}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}=-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int du-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\int\frac{du}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}.$$

Weiter ist, wenn man

$$\frac{u^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}=1+\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}\ \text{setzt},$$

$$6)\quad -\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int\frac{u^2du}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}=-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\int du$$

$$-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\int\frac{udu}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}+\frac{1}{3a}\int\frac{du}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}.$$

Durch Zusammenstellung von 5) und 6) geht die Gleichung 4) über in

$$7)\quad \int\frac{udu}{b+au^3}=-\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\int\frac{du}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u}+\frac{1}{3a}\int\frac{du}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}$$

$$+\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\int\frac{udu}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,u+u^2}.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2} = -\int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} \int \frac{dz}{\frac{z^2}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} + 1}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctang} x$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}, \text{ wonach}$$

$$\int \frac{udu}{b+au^3} = -\frac{1}{3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \log\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + u\right) + \frac{1}{6a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \log\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2\right) - \frac{1}{a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$$

$$= -\frac{1}{6a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

Aus C) folgt daher

$$\pi \int y^2 dx = \frac{a^2b^2}{9}\pi \left[\frac{2abu^5}{(b+au^3)^3} - \frac{b^2u^3}{(b+au^3)^3} + \frac{2bu^2}{(b+au^3)^2} - \frac{2u^2}{3(b+au^3)} + \frac{1}{9a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2} + \frac{2}{3a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \right] + C.$$

Wendet man nun die zuletzt angegebene Methode zur Bestimmung der Constante C an, wonach für den Curvenzweig EAD die Grenzgleichung $u = tg\varphi = 0$, für den Curvenzweig CAF die Grenzgleichung $tg\varphi = \infty$ gilt, so haben wir für den in A verschwindenden Körper V(ABD) die Gleichung

$$V(ABD) = 0 = 0 + \frac{2a^2b^2\pi}{\sqrt[3]{27a\sqrt{3}\sqrt{\frac{b}{a}}}} \operatorname{arctang}\frac{1}{\sqrt{3}} + C, \text{ also}$$

$$C = -\frac{2a^2b^2\pi}{\sqrt[3]{27a\sqrt{3}\sqrt{\frac{b}{a}}}} \operatorname{arctang}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{ab^2\pi^2}{\sqrt[3]{81\sqrt{3}\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Es werden nämlich für $u = 0$ alle Glieder zu Null, indem die 4 ersten unter der Form $\frac{m}{\left(\frac{n}{0}+0\right)}p$ erscheinen, das 5te aber unter der Form $\frac{1}{\sqrt[3]{9a\sqrt{\frac{b}{a}}}} \overset{\circ}{\log} 1 = 0$.

Hiernach gilt für den Körper, welcher durch den Bogen AD begrenzt wird, die Gleichung

$$V(ABD) = \frac{a^2b^2\pi}{9}\left[\frac{2abu^5}{\sqrt[3]{(b+au^3)^3}} - \frac{b^2u^2}{\sqrt[3]{(b+au^3)^3}} + \frac{2bu^2}{\sqrt[3]{(b+au^3)^2}} - \frac{2u^2}{3\sqrt[3]{(b+au^3)}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt[3]{9a\sqrt{\frac{b}{a}}}} \overset{\circ}{\log} \frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b}{a}}}+u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2} + \frac{1}{3a\sqrt{3}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b}{a}}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b}{a}}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b}{a}}}}\right]$$

$$- \frac{ab^2\pi^2}{\sqrt[3]{81\sqrt{3}\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Für den in A verschwindenden Körper V(CAF) gilt die Gleichung $V(CAF) = 0 = 0 - \frac{ab^2\pi^2}{\sqrt[3]{27\sqrt{3}\sqrt{\frac{b}{a}}}} + C$, also

$C=\dfrac{ab^2\pi^2}{27\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$. Es werden nämlich die 5 ersten Glieder für $u=tg\varphi=\infty$ zu Null, das 6te Glied wird gleich

$$\frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctang}(-\infty)=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

Hiernach gilt für den Körper, welcher durch den Bogen CA begrenzt wird, die Gleichung

$$V_{(ABC)}=\frac{a^2b^2\pi}{9}\left[\frac{2abu^5}{(b+au^3)^3}-\frac{b^2u^2}{(b+au^3)^3}+\frac{2bu^2}{(b+au^3)^2}-\frac{2u^2}{3(b+au^3)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2}+\frac{2}{3a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\right]$$

$$+\frac{ab^2\pi^2}{27\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}.$$

Für den Punkt G war nach Seite 43 $u=tg\varphi=\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$, mithin ist

$$V_{(AHGD)}=\frac{a^2b^2\pi}{9}\left[\frac{2ab\cdot\frac{b}{2a}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}{\left(b+a\cdot\frac{b}{2a}\right)^3}-\frac{b^2\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}{\left(b+a\cdot\frac{b}{2a}\right)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}{\left(b+a\cdot\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{2\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}{b+a\cdot\frac{b}{2a}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}\right.$$

$$+\frac{2}{3a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-2\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\Bigg]-\frac{ab^2\pi^2}{81\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$$

$$=\frac{ab\sqrt[3]{2ab^2}}{54}\pi\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\left(\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}-\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\right].$$

Weiter ist

$$V(AHGC)=\frac{ab\sqrt[3]{2ab^2}}{54}\pi\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right]$$

und hiernach der Körper, welcher durch Umdrehung der Ovale um die Achse entsteht,

$$V(ACGD)=V(AHGC)-V(AHGD)=$$

$$\frac{ab\sqrt[3]{2ab^2}}{54}\pi\left(\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2ab\sqrt[3]{2ab^2}\sqrt[3]{4}}{81\sqrt{3}}\pi^2.$$

§. 9.

Der Schwerpunkt der Curve.

Bezeichnet S die Fläche, von welcher der Schwerpunkt bestimmt werden soll, so sind die Coordinaten desselben

$$S\xi=\int xydx,\quad S\eta=\frac{1}{2}\int y^2dx.$$

Nach Seite 41 ist $ydx = \frac{a^2b^3u^2 - 2a^3b^2u^5}{(b+au^3)^3}du$ und $x = \frac{abu}{b+au^3}$, mithin ist

$$\int xydx = a^3b^4 \int \frac{u^3du}{(b+au^3)^4} - 2a^4b^3 \int \frac{u^6du}{(b+au^3)^4}.$$

Es ist nun $\int \frac{u^3du}{(b+au^3)^4} = \int u \frac{u^2du}{(b+au^3)^4}$, also nach der partiellen Integration

$$\int \frac{u^3du}{(b+au^3)^4} = -\frac{u}{9a(b+au^3)^3} + \frac{1}{9a} \int \frac{du}{(b+au^3)^3}.$$

Verfährt man nun nach der oben angegebenen Weise, so wird zuletzt

$$1) \int \frac{u^3du}{(b+au^3)^4} = -\frac{u}{9a(b+au^3)^3} + \frac{u}{54ab(b+au^3)^2} + \frac{5u}{162\,ab^2(b+au^3)} + \frac{5}{81\,ab^2} \int \frac{du}{b+au^3}.$$

Weiter ist nach derselben Weise

$$2) \int \frac{u^6du}{(b+au^3)^4} = -\frac{u^4}{9a(b+au^3)^3} - \frac{4u}{54a^2(b+au^3)^2} + \frac{4u}{162\,a^2b(b+au^3)} + \frac{4}{81\,ab^2} \int \frac{du}{b+au^3}.$$

Durch Zusammenstellung von 1) und 2) ergibt sich

$$\int xydx = a^3b^3 \left[\frac{2u^4}{9(b+au^3)^3} - \frac{bu}{9a(b+au^3)^3} + \frac{u}{6a(b+au^3)^2} - \frac{u}{54ab(b+au^3)} - \frac{1}{27ab} \int \frac{du}{b+au^3} \right].$$

Leicht findet man nach Früherem

$$\int \frac{du}{b+au^3} = \frac{1}{6a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} \log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}},$$

wonach endlich

$$\int xydx = a^3b^3\left[\frac{2u^4}{9(b+au^3)^3} - \frac{bu}{9a(b+au^3)^3} + \frac{u}{6a(b+au^3)^2}\right.$$

$$- \frac{u}{54ab(b+au^3)} - \frac{1}{162a^2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} \log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u+u^2}$$

$$\left. + \frac{1}{27a^2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt{3}}\right] + C.$$

Wendet man zur Bestimmung der Constante die oben angegebene Methode an, so gilt für die Abscisse ξ des Schwerpunktes der Fläche AHGD die Bedingungsgleichung

$$S\xi = a^3b^3\left[\frac{5\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}}{81ab} - \frac{1}{162a^2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} \log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{27a^2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt{3}} - \frac{\pi}{162a^2b\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{3}}\right],$$

mithin, da die Fläche AHGD $= \frac{1}{18}ab$ ist, die Abscisse des Schwerpunktes der Fläche AHGD:

$$\xi = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2}\log \frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{6\sqrt{3}}\right).$$

Für die Abscisse ξ_1 der Fläche AHGC gilt die Gleichung

$$S_1\xi_1 = \frac{a^2b}{27}\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}\right),$$

mithin, da $S_1 = \frac{2}{9}ab$ ist, die Abscisse des Schwerpunktes der Fläche AHGC:

$$\xi_1 = \frac{1}{6}a\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}\right).$$

Hieraus folgt für die Abscisse ξ_2 der Ovale ADGC:

$$(S_1 - S)\xi_2 = a^2b\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}\left(\frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{2ab\sqrt[3]{a^2b}\,.\,\pi}{81\sqrt{3}},$$

mithin, da $S_1 - S = \frac{1}{6}ab$ ist, $\xi_2 = \frac{4\sqrt[3]{a^2b}\,.\,\pi}{27\sqrt{3}} = 0{,}97656.$

Nach Seite 49 ist

$$\int y^2\,dx = \frac{a^2b^2\pi}{9}\left[\frac{2abu^5}{(b+au^3)^3} - \frac{b^2u^2}{(b+au^3)^3} + \frac{2bu^2}{(b+au^3)^2} - \frac{2u^2}{3(b+au^3)}\right.$$

$$+ \frac{1}{9a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+u\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}u + u^2}$$

$$\left. + \frac{2}{3a\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - 2u}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\right] + C,$$

woraus man nach angegebener Weise findet:

Die Ordinate des Schwerpunktes der Fläche AHGD

$$\eta = \frac{\sqrt[3]{2ab^2}}{6}\pi\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}} + \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\right].$$

Die Ordinate des Schwerpunktes der Fläche AHGC

$$\eta_1 = \frac{\sqrt[3]{2ab^2}}{24}\pi\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}} + \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right].$$

Die Ordinate des Schwerpunktes der Ovale ADGC

$$\eta_2 = \frac{4\sqrt[3]{ab^2}\,.\,\pi}{27\sqrt{3}} = 0{,}88725.$$

Ist demnach AQ=0,97656, QP=0,88725, so ist P der Schwerpunkt der Ovale.

§. 10.

Bestimmung des Schwerpunktes der Rotationskörper.

Es möge sich die durch die Curve abgegrenzte Fläche um die x-Achse drehen, dann liegt der Schwerpunkt auf dieser, daher die Ordinate η des Schwerpunktes $= 0$, und für die Abscisse ξ gilt, wenn man den Rotationskörper mit V bezeichnet,

$$V\xi = \pi\int x\,.\,y^2\,dx.$$

Nun war

$$y^2dx = \frac{a^3b^4u^4du}{(b+au^3)^4} - \frac{2a^4b^3u^7du}{(b+au^3)^4} \text{ und } x = \frac{abu}{b+au^3},$$

mithin wird

$$\text{I) } V\xi = a^4b^5\pi\int\frac{u^5du}{(b+au^3)^5} - 2a^5b^4\pi\int\frac{u^8du}{(b+au^3)^5}.$$

Für 1) $b+au^3=x$, wird 2) $u^2du=\frac{dx}{3a}$, 3) $u^3=\frac{x-b}{a}$, 4) $u^6=\frac{(x-b)^2}{a^2}$. Aus 1), 2) und 3) folgt

$$\text{A) } \int\frac{u^5du}{(b+au^3)^5} = \frac{1}{3a^2}\int\frac{x-b}{x^5}dx = \frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{x^4} - \frac{b}{3a^2}\int\frac{dx}{x^5}$$
$$= -\frac{1}{9a^2(b+au^3)^3} + \frac{b}{12a^2(b+au^3)^4}.$$

Aus 1), 2) und 4) folgt

$$\text{B) } \int\frac{u^8du}{(b+au^3)^5} = \frac{1}{3a^3}\int\frac{(x-b)^2dx}{x^5} = \frac{1}{3a^3}\int\frac{dx}{x^3} - \frac{2b}{3a^3}\int\frac{dx}{x^4}$$
$$+\frac{b^2}{3a^3}\int\frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{6a^3(b+au^3)^2} + \frac{2b}{9a^3(b+au^3)^3} - \frac{b^2}{12a^3(b+au^3)^4}.$$

Nach I), A) und B) wird demnach

$$V\xi = a^2b^4\pi\left[\frac{1}{3(b+au^3)^2} - \frac{5b}{9(b+au^3)^3} + \frac{b^2}{4(b+au^3)^4}\right] + C.$$

Für $u=0$ wird dann

$$V_0\xi(=0) = a^2b^4\pi\left[\frac{1}{3b^2} - \frac{5}{9b^2} + \frac{1}{4b^2}\right] + C, \text{ also } C = -\frac{a^2b^2\pi}{36},$$

demnach gilt für die Abscissen der Schwerpunkte der Rotationskörper, welche durch den Curvenzweig EAD begrenzt werden, die Bedingungsgleichung

$$V\xi_1 = a^2b^4\pi\left[\frac{1}{3(b+au^3)^2} - \frac{5b}{9(b+au^3)^3} + \frac{b^2}{4(b+au^3)^4}\right] - \frac{a^2b^2\pi}{36}.$$

Für $u=\infty$ wird im Punkte A

$$V_\infty\xi(=0) = 0+C, \text{ mithin } C=0,$$

demnach gilt für die Abscissen der Schwerpunkte der Rotationskörper, welche durch den Curvenzweig CAF begrenzt werden, die Bedingungsgleichung

$$V\xi_2 = a^2b^4\pi\left[\frac{1}{3(b+au^3)^2} - \frac{5b}{9(b+au^3)^3} + \frac{b^2}{4(b+au^3)^4}\right].$$

Für $u=\sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$ wird $V_{\xi_1}=\frac{5a^2b^2\pi}{972}$, mithin wird nach Seite 52 die Abscisse des Schwerpunktes desjenigen Rotationskörpers, welcher durch den Bogen ACG und die Tangente HG begrenzt wird,

$$\xi_1=\frac{5\sqrt[3]{a^2b}}{18\sqrt[3]{2}}\left[\frac{1}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}-\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\right],$$

und desjenigen Körpers, welcher durch den Bogen ACG und die Tangente HG begrenzt wird, da für diesen $V_{\xi_2}=\frac{8a^2b^2\pi}{243}$ ist,

$$\xi_2=\frac{16\sqrt[3]{a^2b}}{9\sqrt[3]{2}}\left[\frac{1}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\log\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\frac{1-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right].$$

Die Abscisse des Körpers, welcher durch die Umdrehung der Ovale entstanden, ist hiernach $\xi_3=\frac{9\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b}}{16\pi}=1{,}12706$, also P_1 der Schwerpunkt, wenn $AP_1=1{,}12706$ gemacht wird.

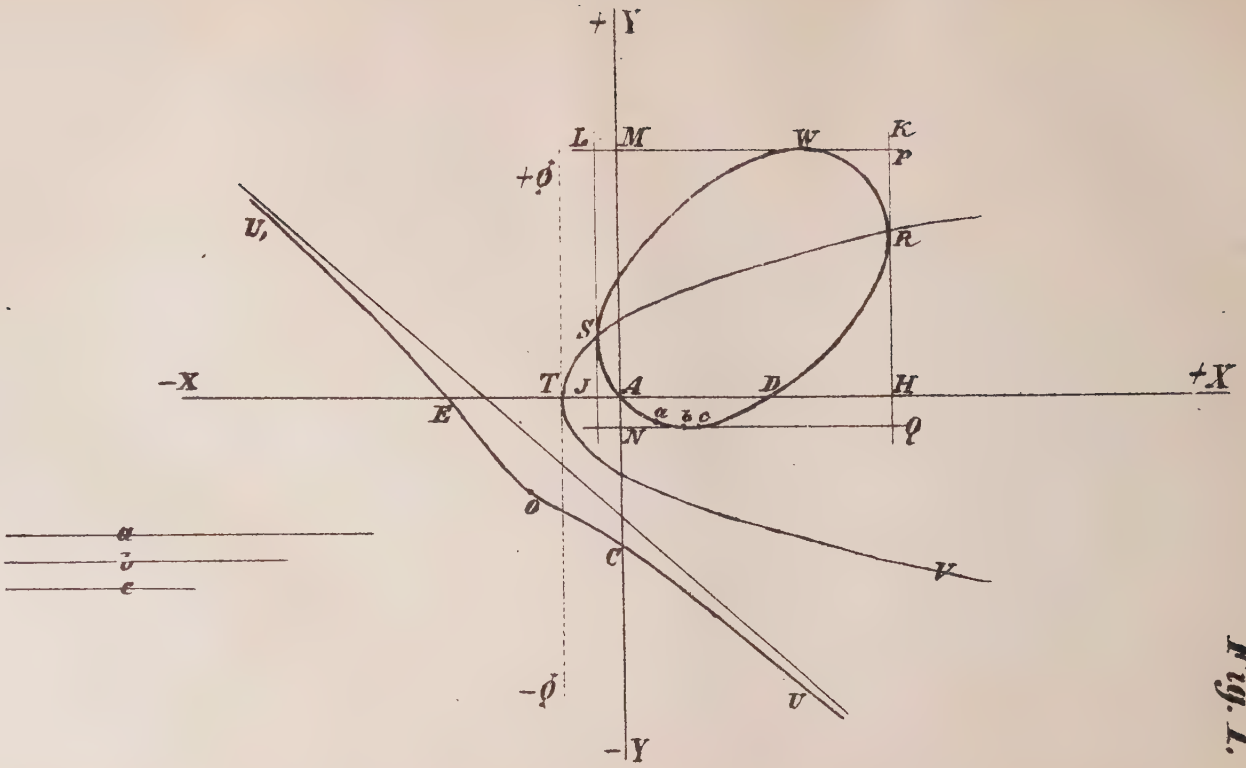


Fig. I.

Fig. II.

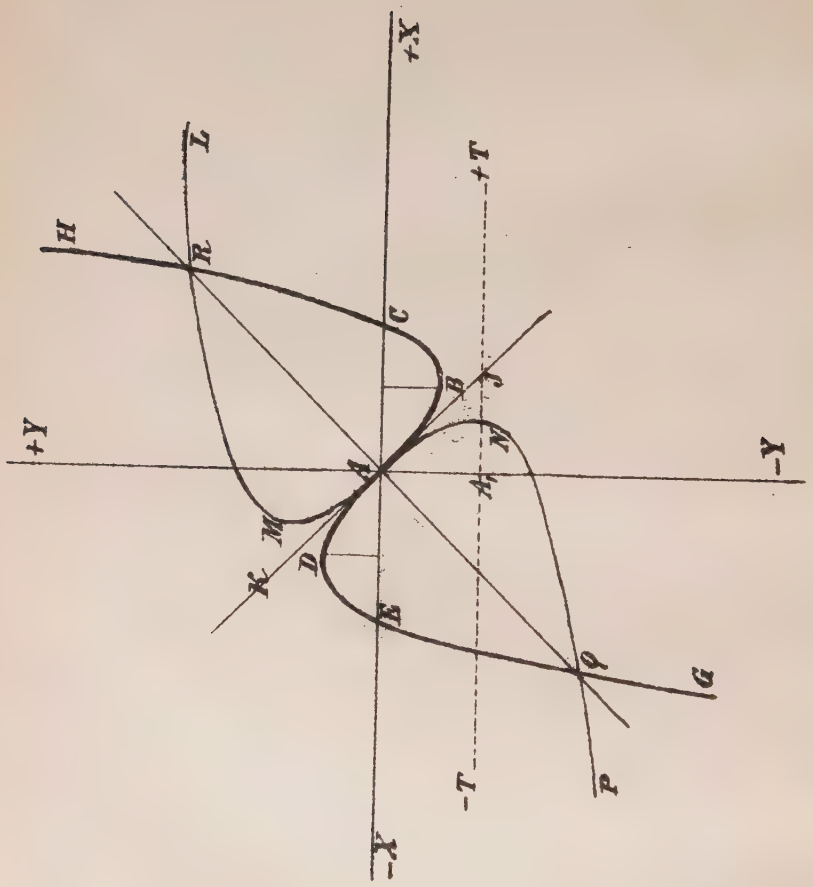


Fig. III

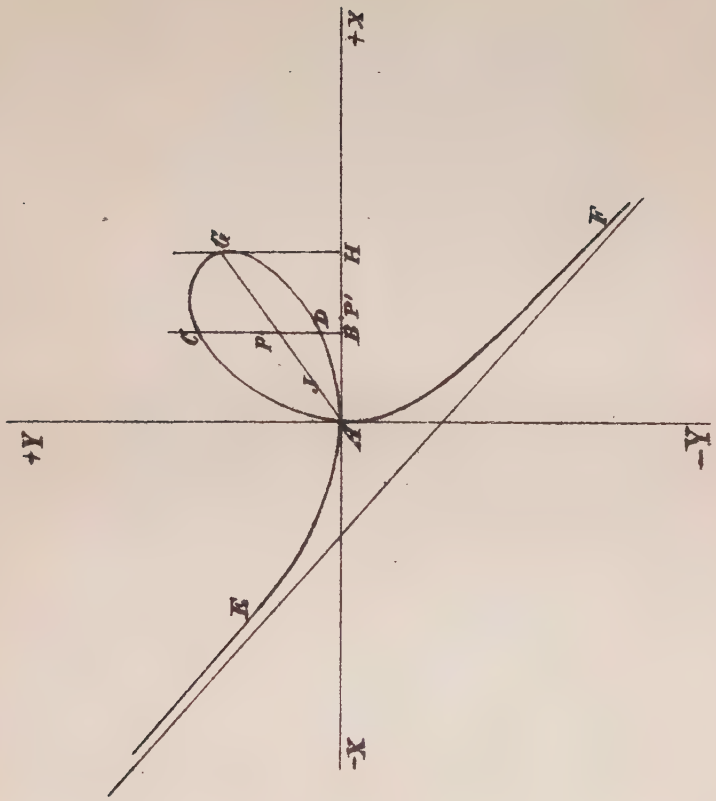


Fig. IV.

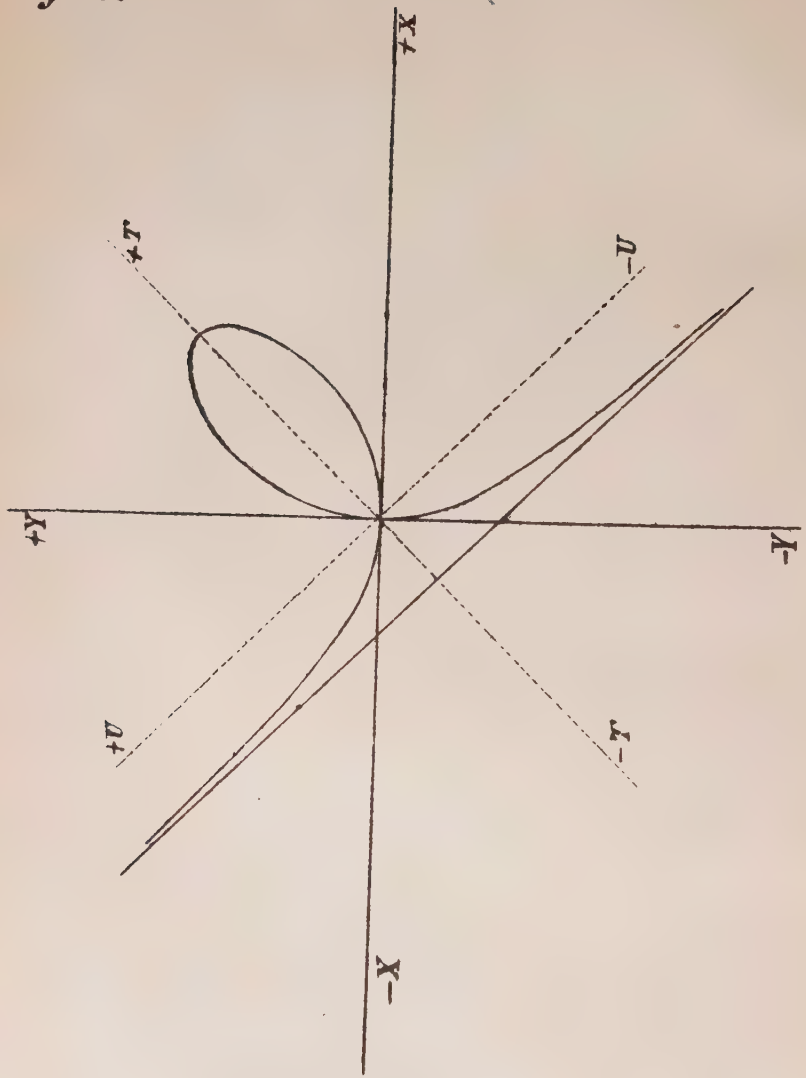


Fig. V.

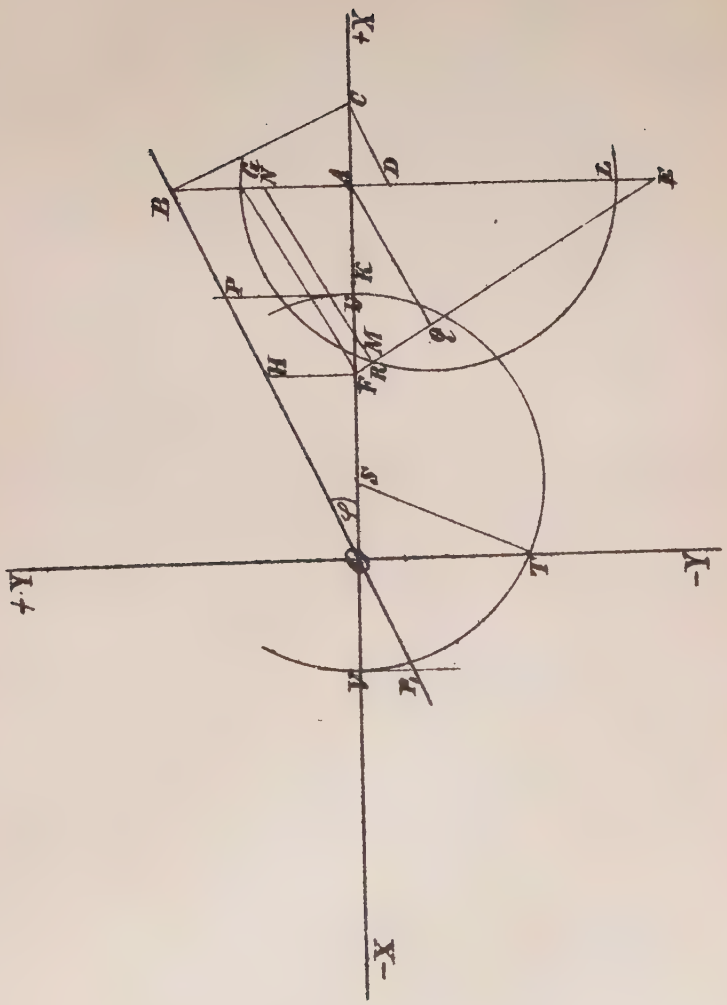


Fig. VI.

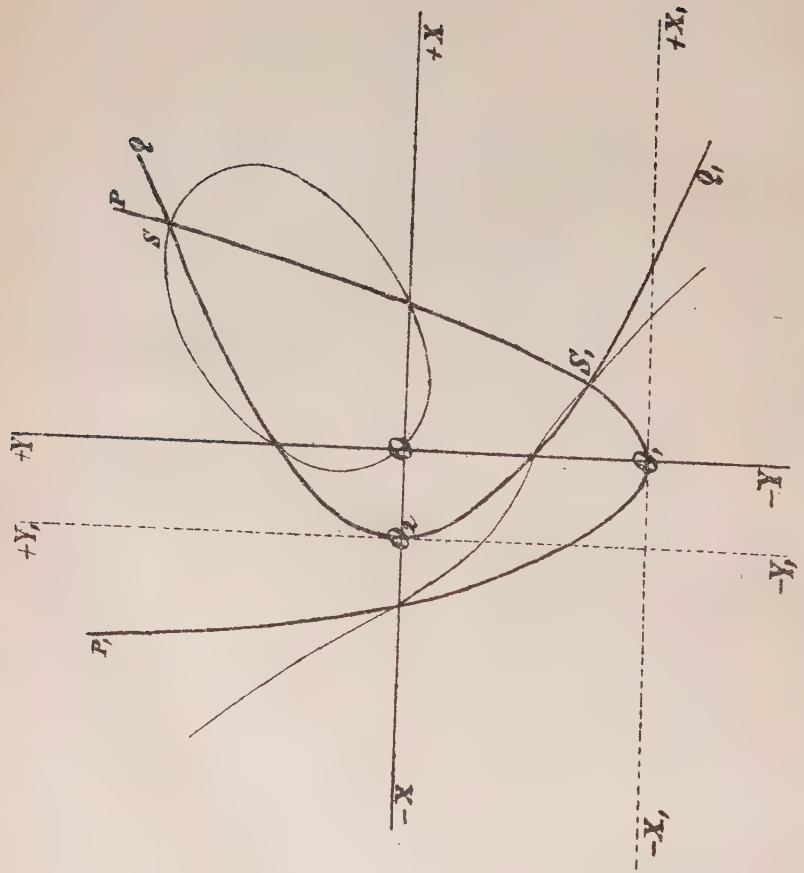


Fig. VII.

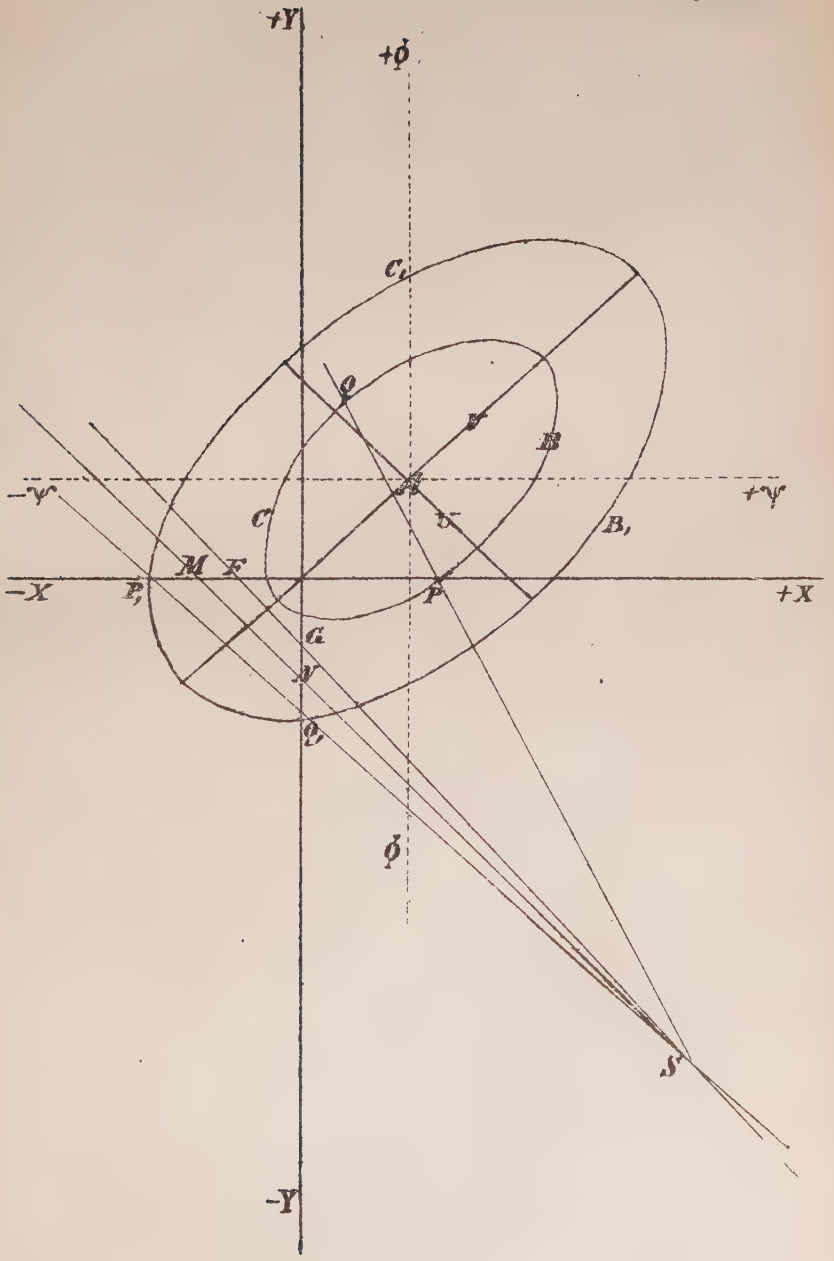


Fig. VIII.

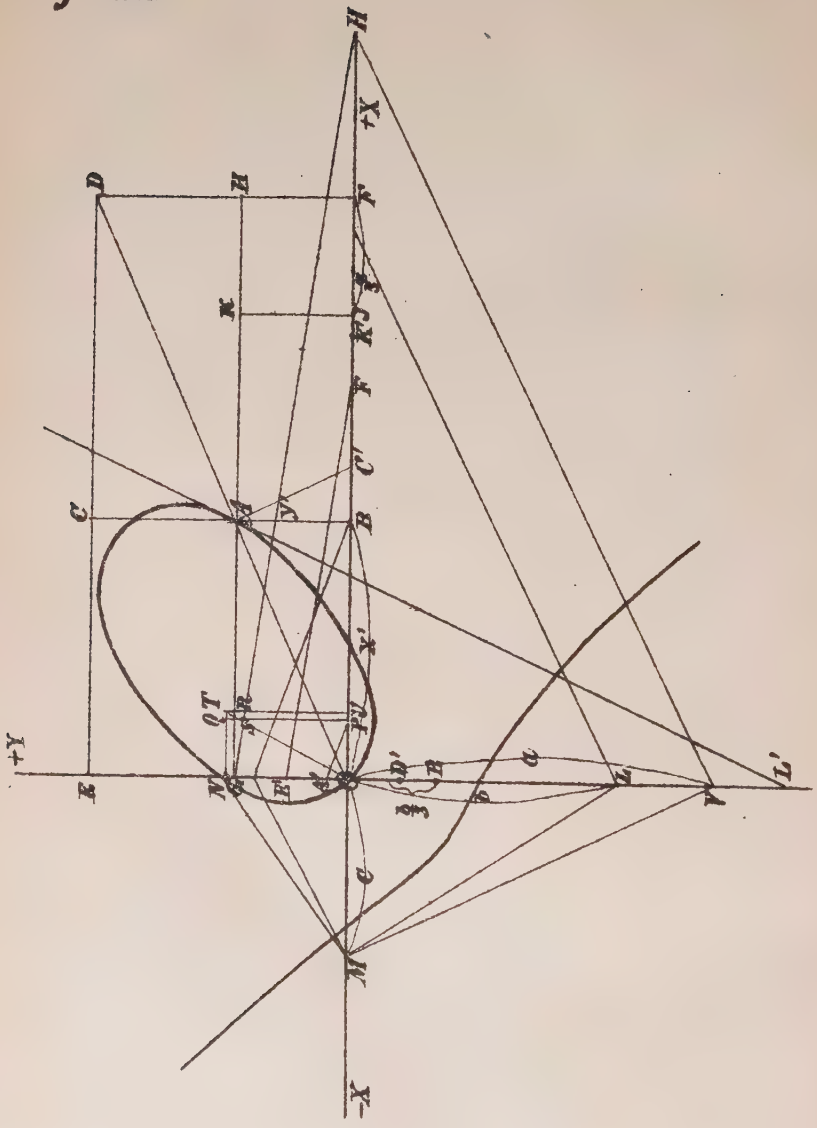


Fig. IX.

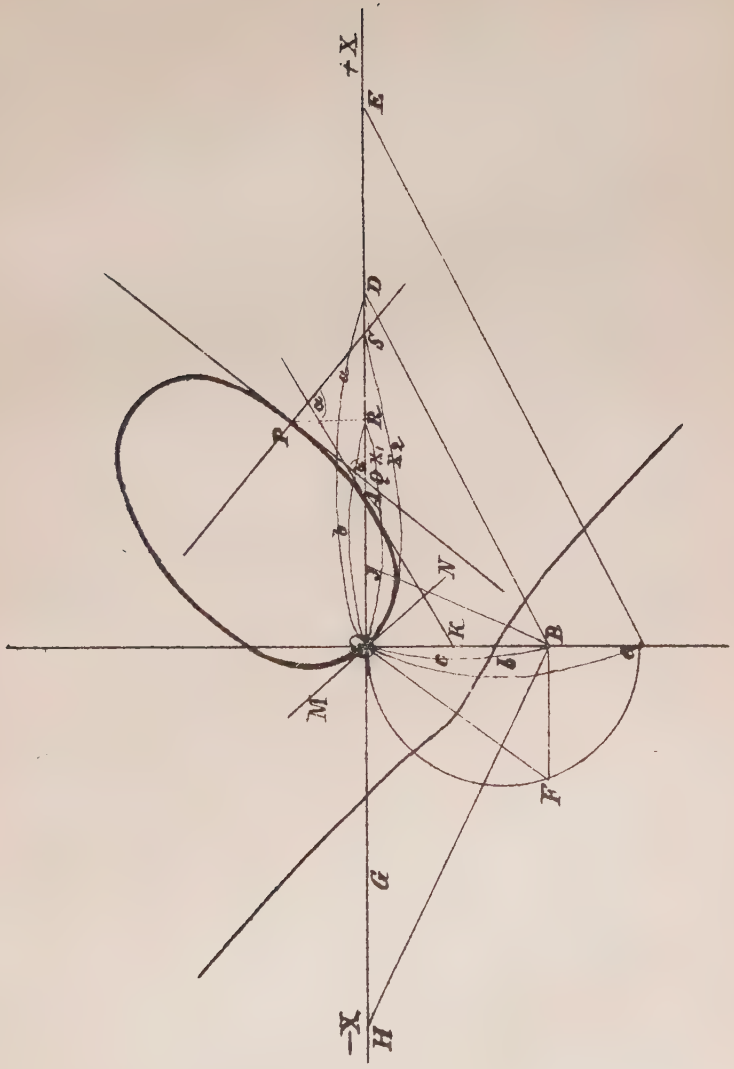


Fig. X.

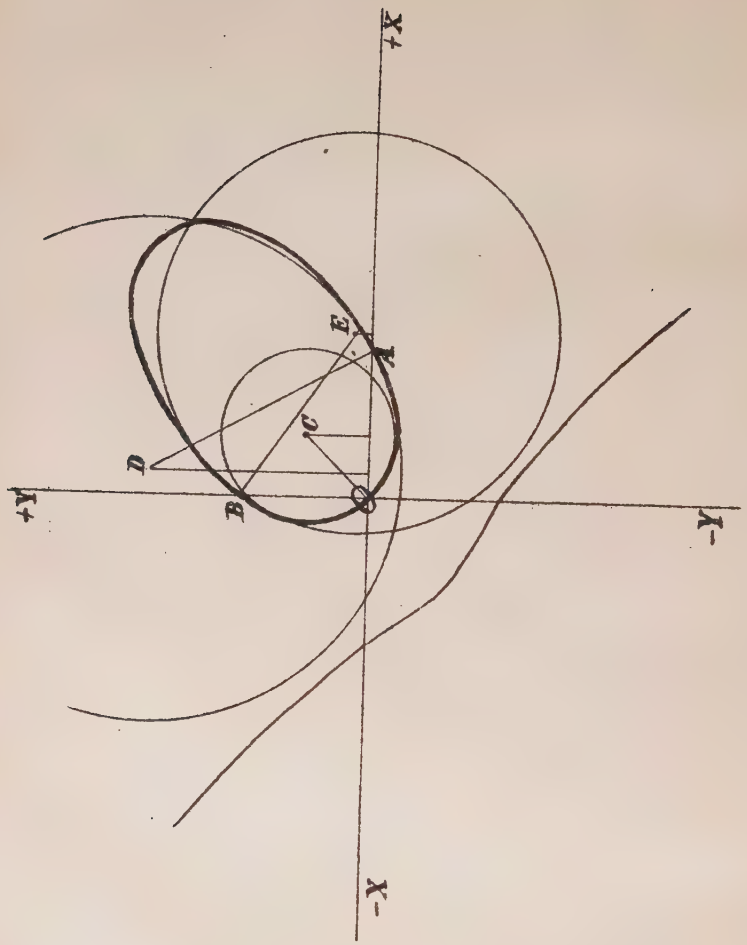
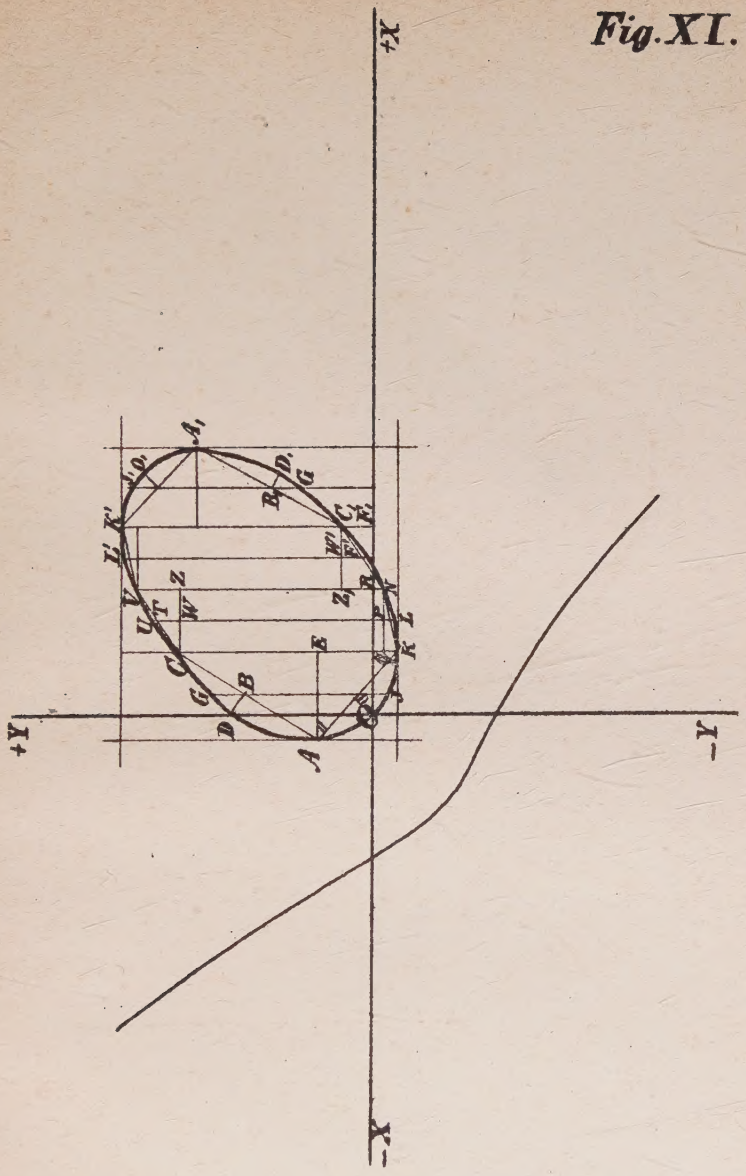


Fig. XI.


+X
-X
+Y
-Y
A
A,
B
B,
C
C,
D
D,
E
E,
F
F,
G
G,
H
H,
I
I,
J
J,
K
K,
L
L,
M
M,
N
N,
O
O,
P
P,
Q
Q,
R
R,
S
S,
T
T,
U
U,
V
V,
W
W,
X
X,
Y
Y,
Z
Z,